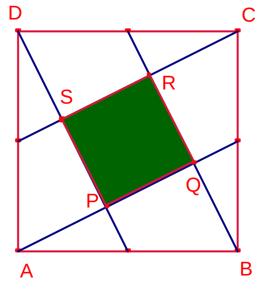
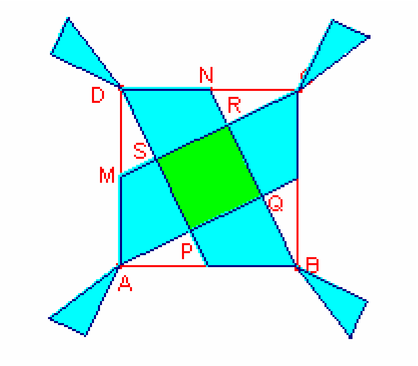
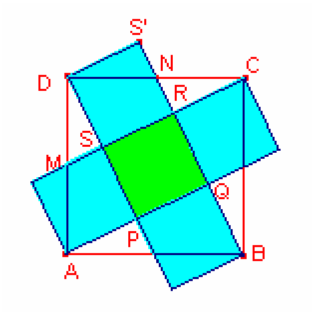
Problema 9

Siga el quadrat ABCD de costat 1. S'uneixen els vèrtexs amb els punts migs dels costats del quadrat formant el quadrat PQRST. Determineu l'àrea del quadrat PQRS.



Solució 1:





Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$, N el punt mig del costat $\overline{CD}$

Notem que $\angle MDS = 90º - \angle SDR$, $\angle DMS = 180º - \angle DNR$, $\overline{MD} = \overline{DR}$.

Si efectuem un gir de $-270º$ i centre D, transforma el triangle $\overset{\Delta}{MSD}$ en el triangle $\overset{\Delta}{NS'D}$.

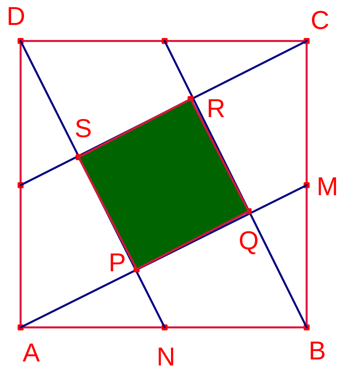
Notem que el quadra SRS'D és igual al quadrat PQRS.

Aleshores l'àrea del quadrat ABCD és 5 vegades l'àrea del quadrat PQRS.

Per tant, $S_{PQRS} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$.

Solució 2:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APN}$, $\overset{\Delta}{AQB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{NB}}$, aleshores, $\overline{AP} = \overline{PQ}$.

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{BQ}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{BQM}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{QM}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, aleshores, $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$.

$$\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QR} = \frac{5}{2}\overline{PQ} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1), (2):

$\frac{5}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

L'àrea del quadrat PQRS és: $S_{PQRS} = \overline{PQ}^2 = \frac{1}{5}$.