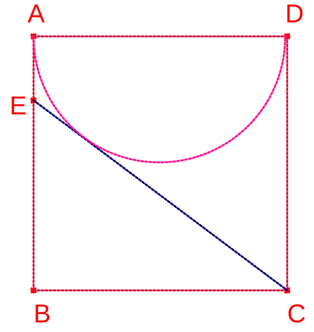
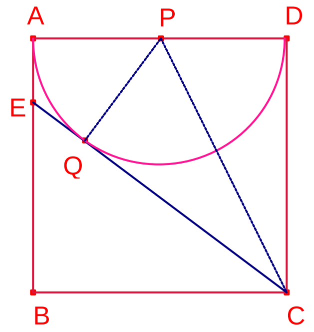
Problema 10

ABCD és un quadrat de costat 1. Una semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$ està continguda en el quadrat.
Siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que el segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CBE}$.



Solució 1:

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga Q el punt de tangència del segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència.



Siga $\alpha = \angle DCP$.

$\overline{PD} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CPD}$, $\overset{\Delta}{CPQ}$ són iguals.

El punt A és el punt de tangència del segment $\overline{BA}$ i la semicircumferència.

Aleshores, $\overline{AE} = \overline{EQ}$.

$\angle APQ = 2\alpha$. $\angle APE = \alpha$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CPD}$, $\overset{\Delta}{PAE}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1

Aleshores, $\overline{AE} = \frac{1}{4}$, Per tant, $\overline{BE} = \frac{3}{4}$.

Aleshores, $S_{CEB} = \frac{3}{8}$.

Solució 2:

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga Q el punt de tangència del segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència.

Siga $\alpha = \angle DCP$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CPD}$, $\overset{\Delta}{CPQ}$ són iguals.

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$.

$\angle BCE = 90º - 2\alpha$.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$. Aleshores, $\overline{BE} = \frac{3}{4}$.

Aleshores, $S_{CEB} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{BE}}{2} = \frac{3}{8}$.