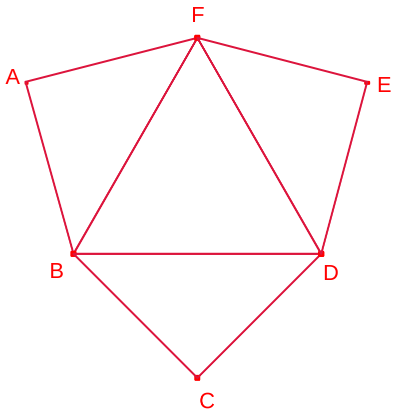
Problema 11



En la següent figura el triangle $\overset{\Delta}{BDF}$ és equilàter i els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ són rectangles i isòsceles.
Proveu que $\overline{AE} = \overline{CF}$.

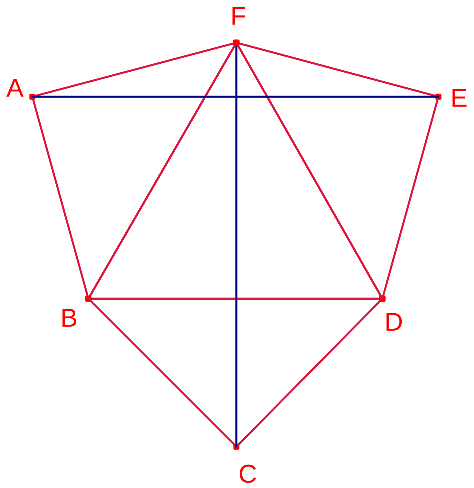
Solució 1:

Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són iguals, per tant, $\overline{AE} = \overline{AC}$.
$\angle AFE = 150^o$, aleshores, $\angle AFC = 75^o$.

$\angle BAF = 90^o$, $\angle BAC = 15^o$, aleshores, $\angle FAC = 75^o$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{AFC}$ és isòsceles, $\overline{AC} = \overline{CF}$.
Aleshores, $\overline{AE} = \overline{CF}$.

Solució 2:
Siga $x = \overline{AB}$.
$\angle AFE = 150^o$, $\angle CDF = 105^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{BF} = x\sqrt{2}$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$:
$\overline{AE}^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 150^o$.
$\overline{AE}^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)x^2$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDF}$:
$\overline{CF}^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 105^o$.
$$\overline{CF}^2 = 3x^2 - 2x^2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right).$$
$\overline{CF}^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)x^2$.
Aleshores, $\overline{AE} = \overline{CF}$.