Problema 14

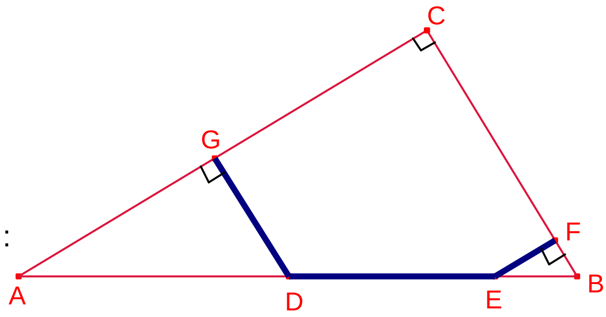
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^{o}$.

Siguen els punts D, E de la hipotenusa tal que $\overline{AE} = \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{BC}$.

Siga F la projecció de E sobre el catet $\overline{BC}$.

Siga G la projecció de D sobre el catet $\overline{AC}$.

Proveu que $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$.



Solució:

Siga $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$c^2 = a^2 + b^2$.

$\overline{DE} = \overline{BD} - \left(\overline{AB} - \overline{AE}\right) = a - (c - b) = a + b - c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADG}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DG}}{c - a} = \frac{a}{c}$. Aleshores, $\overline{DG} = \frac{a(c - a)}{c}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{EBF}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{EF}}{c - b} = \frac{b}{c}$. Aleshores, $\overline{EF} = \frac{b(c - b)}{c}$.

$$\overline{EF} + \overline{DG} = \frac{b(c - b)}{c} + \frac{a(c - a)}{c} = \frac{bc - b^2 + ac - a^2}{c} = \frac{bc + ac - c^2}{c} = a + b - c.$$

Aleshores, $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$.