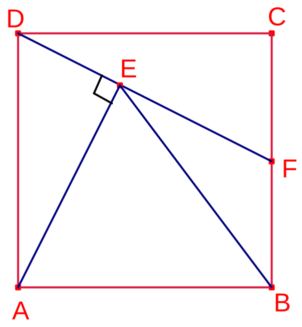
Problema 17

El costat del quadrat ABCD és c.

F és el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga E la projecció de A sobre el segment $\overline{DF}$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{BE}$.



Solució 1:

Efectuem el gir de -90^{o} i centre A del triangle $\overset{\Delta}{AED}$ que el transforma en el triangle $\overset{\Delta}{ABE'}$.

El costat $\overline{GE'}$ quadrat AE'GE conté el punt B.

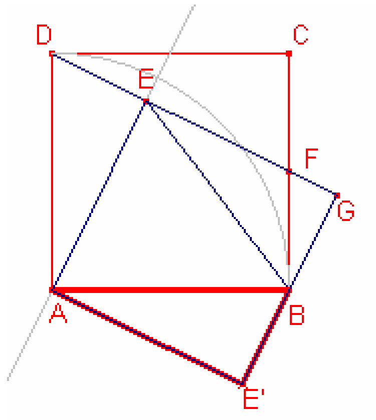
Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{DEA}$ són semblants:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BE'}}{\overline{AE'}} = \frac{1}{2}$.

Per tant, B és el punt mig del costat $\overline{GE'}$.

Aleshores, $\overline{BE} = \overline{AB}$.



Solució 2:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FCD}$:

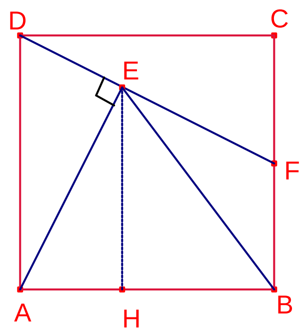
$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{DEA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}$. $\frac{\overline{DE}}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$. Aleshores, $\overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{5}c$.

$$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{DE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c.$$

Siga H la projecció de E sobre el segment $\overline{AB}$



Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{AHE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}$. $\frac{\overline{EH}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$. Aleshores, $\overline{EH} = \frac{4}{5}c$.

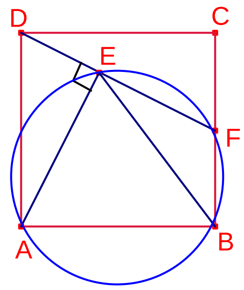
$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{EH} = \frac{2}{5}c.$$

$$\overline{BH} = c - \overline{AH} = \frac{3}{5}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHE}$, $\overline{BE} = c$.

Solució 3:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FCD}$: $\overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$.



Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{DEA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}$. $\frac{\overline{DE}}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$. Aleshores, $\overline{DE} = \frac{\sqrt{5}}{5}c$.

$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{DE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c$. $\overline{EF} = \overline{DF} - \overline{DE} = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$. $\overline{AF} = \overline{DF} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$.

El quadrilàter ABFE és inscriptible ja que té dos angles oposats rectes. Aplicant el teorema de Tolomeu:

$\overline{EF} \cdot \overline{AB} + \overline{AE} \cdot \overline{BF} = \overline{AF} \cdot \overline{BE}$.

$\frac{3\sqrt{5}}{10}c \cdot c + \frac{2\sqrt{5}}{5}c \cdot \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}c \cdot \overline{BE}$. Resolent l'equació:

$\overline{BE} = c$.