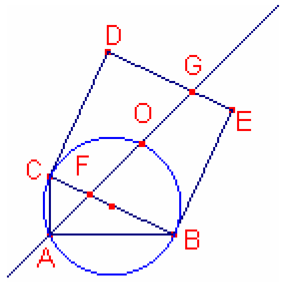
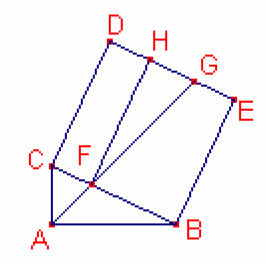
**Problema 20**
Si en un triangle rectangle construïm un quadrat sobre la hipotenusa. La bisectriu de l'angle recte divideix el quadrat en dos quadrilàters d'igual àrea.

Solució 1:
La bisectriu de l'angle recte d'un triangle rectangle talla la circumferència circumscrita al triangle en un punt O tal que és el centre del quadrat construït sobre la hipotenusa ja que $\overline{OC} = \overline{OB}$ i $\angle BOC = 90^o$.




Qualsevol recta que passa pel centre d'un quadrat divideix el quadrat en dues parts simètriques i equivalents.

Solució 2:




Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
Siga BEDC el quadrat exterior sobre la hipotenusa.
Siga $\overline{AF}$ la bisectriu de l'angle A.
La recta AF talla en quadrat sobre la hipotenusa en el punt G.
Siga H en el $\overline{DE}$ tal que $\overset{\Delta}{GHF}$ és rectangle.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AFC}$:

$$\frac{\overline{CF}}{\sin 45^o} = \frac{b}{\sin(135^o - C)}.$$

Aleshores, $\overline{CF} = \dfrac{b \cdot \sin 45^o}{\sin(135^o - C)} = \dfrac{b\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos C + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C} = \dfrac{b}{\dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{a}} = \dfrac{ab}{b+c}$.

Considerant el quadrilàter AGDC, notem que,
$\angle AGH = 360^o - 45^o - (C + 90^o) - 90^o = 135^o - C$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GHF}$:

$$\overline{GH} = \frac{a}{tg(135^o - C)} = \frac{a}{\dfrac{tg135^o - tgC}{1 + tg135^o\, tgC}} = a\frac{1 + tg135^o\, tgC}{tg135 - tgC} = a\frac{1 - \dfrac{c}{b}}{-1 - \dfrac{c}{b}} = a\frac{b-c}{-b-c} = a\frac{c-b}{b+c}.$$

$$2 \cdot \overline{CF} + \overline{GH} = 2\frac{ab}{b+c} + a\frac{c-b}{b+c} = a.$$

Aleshores, $\overline{EG} = a - \overline{CF} - \overline{GH} = 2\overline{CF} + \overline{GH} - \overline{CF} - \overline{GH} = \overline{CF}$.
Per tant els quadrilàters CFGD i FBEG són iguals per tant tenen la mateixa àrea.