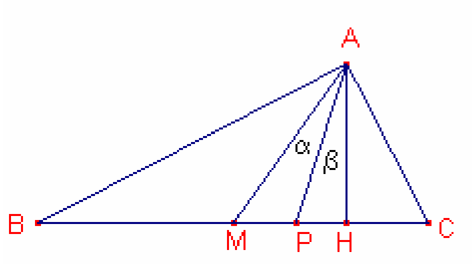
Problemes del 1 al 10

Problema 1

Demostreu que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle entre la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex.

Solució:



Siguen la mitjana $\overline{AM}$, l'altura $\overline{AH}$, i la bisectriu $\overline{AP}$.

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa. Per tant,

$\overline{AM} = \overline{MC} \quad \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{AMC}$ és isòsceles.

Aleshores $\hat{C} = 45º + \alpha$

$\hat{P} + 45º + \hat{C} = 180º$

$\hat{P} + \beta = 90º \Rightarrow \hat{P} = 90º - \beta$

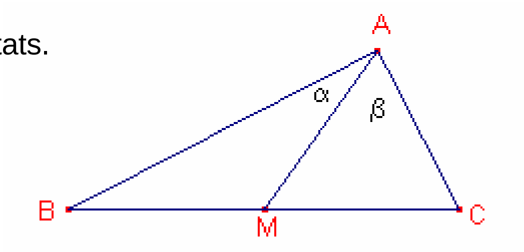
Per tant $90º - \beta + 45º + 45º + \alpha = 180º$

Podem concloure que $\beta = \alpha$.

Problema 2

La mitjana traçada sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle divideix l'angle recte en una raó 1:2 i és igual a m.
Determineu el valor dels costats.

Solució:



Siga la mitjana $\overline{AM} = m$

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90º$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa. Aleshores, $\overline{BC} = 2\overline{AM} = 2m$.

$\begin{cases} \alpha + \beta = 90º \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ aleshores $\alpha = 30º, \beta = 60º$

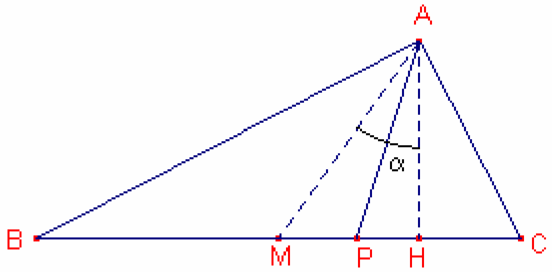
$\overset{\Delta}{AMC}$ és equilàter $\overline{AM} = m \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = m$

$\overset{\Delta}{AMB}$ és isòsceles, per tant $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4m^2 - m^2} = m\sqrt{3}$.

Problema 3

Determineu la bisectriu de l'angle recte d'un triangle rectangle de catets x i y.

Solució:



Siguen la mitjana $\overline{AM}$, l'altura $\overline{AH}$, i la bisectriu $\overline{AP}$.

Siga l'angle $\alpha = \angle MAH$

$\overline{AB} = x \quad \overline{AC} = y \quad \overline{BC} = \sqrt{x^2 + y^2}$

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.

$$\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

L'àrea $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right] = \frac{xy}{2}$, L'àrea $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right] = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \overline{AH}}{2}$.

Igualant les àrees:

$$\frac{xy}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \overline{AH}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Com que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle que formen la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex. (problema 1).

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

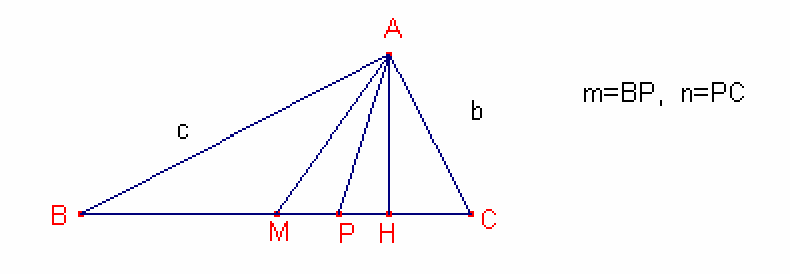
Aleshores $\overline{AP} = \dfrac{\overline{AH}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{\dfrac{1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\,xy}{x + y}$

Problema 4

Des del vèrtex de l'angle recte d'un triangle rectangle s'ha traçat la bisectriu que divideix la hipotenusa en dos segments m i n.

Determineu l'altura traçada sobre la hipotenusa.

Solució:



Siguen la mitjana $\overline{AM}$, l'altura $\overline{AH}$, i la bisectriu $\overline{AP}$.

Siguen els segments $\overline{BP}=m$, $\overline{PC}=n$. Siguen $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$

La bisectriu d'un triangle divideix el costat que talla en segments proporcionals als costats adjacents. Per tant:

$$\frac{b}{c}=\frac{n}{m}$$

Per les àrees $\frac{m+n}{2}\overline{AH}=\frac{bc}{2}$

Com que $\overset{\Delta}{ABC}$, $A=90^o$ és rectangle $c^2+b^2=(m+n)^2$

Considerem el sistema:

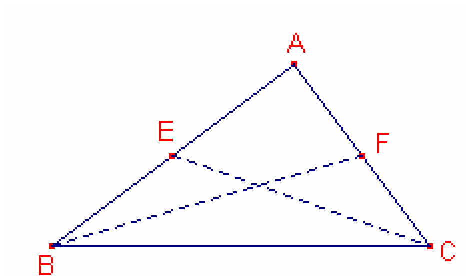
$$\begin{cases} \frac{n}{m}=\frac{b}{c} \\ bc=(m+n)\overline{AH} \\ b^2+c^2=(m+n)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\frac{n}{m}c \\ \frac{n}{m}c^2=(m+n)\overline{AH} \\ \frac{n^2}{m^2}c^2+c^2=(n+m)^2 \end{cases}$$

Dividint les dues últimes equacions obtenim:

$$\overline{AH}=\frac{nm(m+n)}{n^2+m^2}.$$

Problema 5
En un triangle rectangle les mitjanes traçades de dels angles aguts mesuren m, n. Calculeu la hipotenusa.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
Siguen les mitjanes $m = \overline{BF}$, $n = \overline{CE}$
Siguen $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$.

Com que $\overset{\Delta}{AFB}$ és rectangle $c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = m^2$

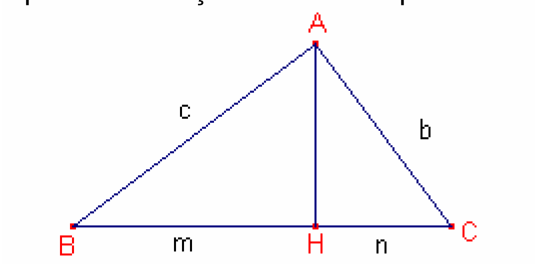
Com que $\overset{\Delta}{AEC}$ és rectangle $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = n^2$

Com que $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $c^2 + b^2 = a^2$
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} c^2 + \dfrac{b^2}{4} = m^2 \\ \dfrac{c^2}{4} + b^2 = n^2 \\ c^2 + b^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{les solucions són} \quad \begin{cases} c = \dfrac{2\sqrt{15}\sqrt{4m^2 - n^2}}{15} \\ b = 15\dfrac{2\sqrt{15}\sqrt{4n^2 - m^2}}{} \\ a = \dfrac{2\sqrt{5}\sqrt{m^2 + n^2}}{5} \end{cases}.$$

Problema 6
El perímetre d'un triangle rectangle és igual a p i l'altura traçada sobre la hipotenusa és h.
Determineu els costats del triangle.

Solució:



Siguen $\overline{AB} = c$ $\overline{AC} = b$ $\overline{BC} = a$
El perímetre és $c + b + a = p$.
L'àrea és $\frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$.

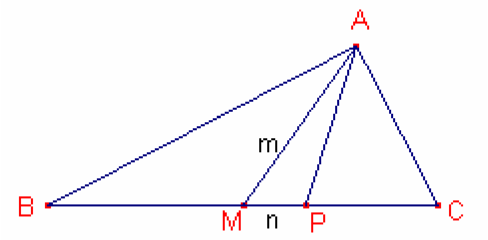
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $c^2 + b^2 = a^2$.
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = p \\ bc = ah \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{la solució del qual és:} \quad \begin{cases} a = \dfrac{p^2}{2(h+p)} \\ b = \dfrac{p + 2h + p\sqrt{p(p-4h) - 4h^2}}{4(h+p)} \\ c = \dfrac{p + 2h - p\sqrt{p(p-4h) - 4h^2}}{4(h+p)} \end{cases}$$

Problema 7

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, siga la mitjana, $\overline{AM} = m$, siga la bisectriu $\overline{AP}$, siga $\overline{MP} = n$.
Determineu els catets.

Solució:



Siguen $\overline{AB} = c \quad \overline{AC} = b$

Siga la mitjana $\overline{AM} = m$, i siga la bisectriu $\overline{MP} = n$

En un triangle rectangle la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa, per tant $\overline{BC} = 2m \quad \overline{MC} = m$

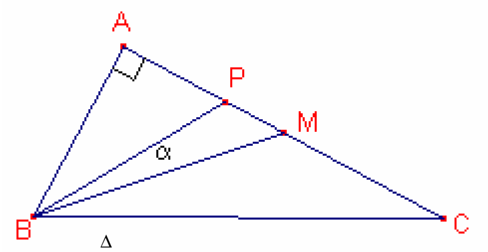
Per la propietat de la bisectriu tenim que: $\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$, és a dir $\frac{m-n}{b} = \frac{m+n}{c}$

Com que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $b^2 + c^2 = (2m)^2$
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{m-n}{b} = \frac{m+n}{c} \\ b^2 + c^2 = (2m)^2 \end{cases} \text{ la seua solució és : } \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}m(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ c = \frac{\sqrt{2}m(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases}$$

Problema 8
Determineu l'angle que formen la mitjana i bisectriu d'un angle agut d'un triangle rectangle, en funció d'aquest angle.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$,

Siguen la bisectriu $\overline{BP}$, la mitjana $\overline{BM}$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{c}{b}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}}{2} + \alpha\right) = \frac{\frac{b}{2}}{c}$. Aleshores, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}}{2} + \alpha\right)$

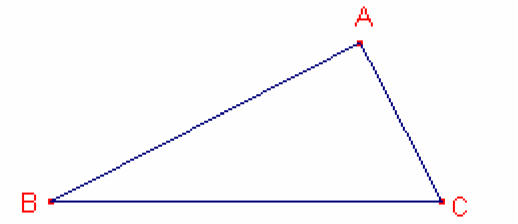
Deduïm:

$$\frac{\hat{B}}{2} + \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\hat{B}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\hat{B}}{2}\right)$$

Problema 9

Demostreu que si en un triangle la raó de les tangents dels angles aguts és igual a la raó dels quadrats dels sinus d'aquests angles, aleshores el triangle és isòsceles o rectangle.

Solució:



$$\frac{tg\hat{C}}{tg\hat{B}}=\frac{\sin^2\hat{C}}{\sin^2\hat{B}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}} \quad\Rightarrow\quad \sin 2\hat{B}=\sin 2\hat{C}$$

Aleshores $2\hat{B}=2\hat{C}$ o $2\hat{B}=180º-2\hat{C}$

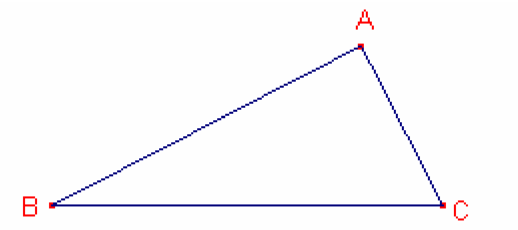
Per tant $\hat{C}=\hat{B}$ o $\hat{C}+\hat{B}=90º$.

En el primer cas el triangle és isòsceles i en el segon cas el triangle és rectangle.

Problema 10

Demostreu que si en un triangle es verifica $\frac{a}{\cos\hat{A}}=\frac{b}{\cos\hat{B}}$ aleshores el triangle és isòsceles.

Solució:



Aplicant el teorema dels sinus $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\cos\hat{A}}=\dfrac{b}{\cos\hat{B}}\\[2mm] \dfrac{a}{\sin\hat{A}}=\dfrac{b}{\sin\hat{B}}\end{cases}$$

Dividint-les:

$$\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}=\frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}} \quad\Rightarrow\quad tg\hat{A}=tg\hat{B}$$

Aleshores $\hat{A}=\hat{B}$