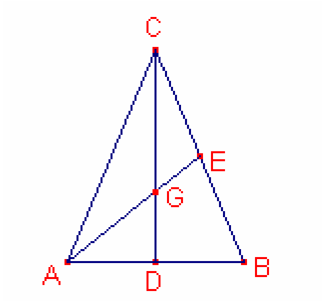
Problemes de l'11 al 20

Problema 11

La base d'un triangle isòsceles és m. La mitjana traçada sobre el costat lateral és igual a n.
Calculeu el costat lateral.



Solució:

Siguen l'altura $\overline{CD}$, la mitjana $\overline{AE} = m$ i el costat $\overline{AC} = b$.
Siga G el baricentre:
Aplicant la propietat de baricentre

Aleshores, $\overline{AG} = \frac{2}{3}n$. $\overline{AD} = \frac{m}{2}$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$ Aplicant el teorema de Pitàgores

$$\overline{GD} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{\frac{4}{9}n^2 - \frac{m^2}{4}}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

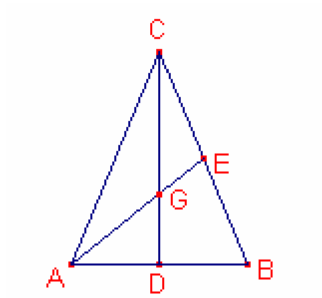
Aleshores $\overline{DC} = 3\overline{GD} = 3\sqrt{\frac{4}{9}n^2 - \frac{m^2}{4}}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$b = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4} + 9\left(\frac{4}{9}n^2 - \frac{m^2}{4}\right)} = \sqrt{4n^2 - 2m^2}.$$

Problema 12

El costat lateral d'un triangle isòsceles mesura m, la mitjana traçada sobre el costat lateral n.
Calculeu la base del triangle.



Solució:

Siguen la mitjana $\overline{AE} = n$, el baricentre G.

Per la propietat del baricentre $\overline{GE} = \frac{n}{3}$, $\overline{AG} = \frac{2n}{3}$.

Siguen $\overline{AD} = x$, $\overline{CD} = h$.

Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{GD} = \frac{h}{3}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{AGD}$ rectangle tenim $\left(\frac{2n}{3}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2$

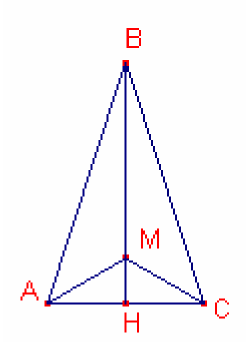
Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ rectangle tenim $m^2 = x^2 + h^2$

Considerem el sistema $\begin{cases} \frac{4n^2}{9} = x^2 + \frac{h^2}{9} \\ m^2 = x^2 + h^2 \end{cases}$ La seua solució és $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{8n^2 - 2m^2}}{4} \\ h = \frac{\sqrt{18m^2 - 8n^2}}{4} \end{cases}$.

Aleshores $\overline{AB} = 2x = \frac{\sqrt{8n^2 - 2m^2}}{2}$.

Problema 13

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sobre l'altura $\overline{BH}$ s'agafa un punt M tal que els angles $\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ són iguals.
En quina raó estan $\overline{BM}$ i l'altura si l'angle de la base és α.



Solució:
Siguen $\angle CAB = \alpha$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$.
Notem que $\angle MAB = 30^o$. $\overline{BH} = c \cdot \sin\alpha$.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(180^o - 2\alpha)}$.

$$\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(2\alpha)} = \frac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$ aleshores, $b = 2c\cdot\cos\alpha$

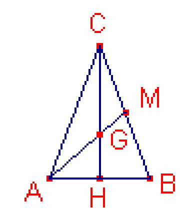
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ $\frac{b}{\sin 120^o} = \frac{\overline{AM}}{\sin 30^o}$ $\Rightarrow$ $\overline{AM} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

$$\overline{MH} = \overline{AM}\cdot\sin 30^o \quad \Rightarrow \quad \overline{MH} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{2c\cdot\cos\alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{c\cdot\cos\alpha}{\sqrt{3}}.$$

$$\overline{BM} = \overline{BH} - \overline{MH} = a\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}\right).$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BM}} = \frac{a\cdot\sin\alpha}{a\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}}.$$

Problema 14
L'angle de la base d'un triangle isòsceles és α.
Determineu la raó entre la base i la mitjana traçada sobre un costat lateral.



Solució:
Siguen $\hat{A} = \alpha$, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\overline{AB} = c$, la mitjana $\overline{AM}$, i G el baricentre.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(180^o - 2\alpha)}$.

Aleshores, $\overline{AB} = c = 2a\cdot\cos\alpha$.
$\overline{CH} = a\cdot\sin\alpha$ $\overline{GH} = \frac{a\cdot\sin\alpha}{3}$ (aplicant la propietat del baricentre).
El triangle $\overset{\Delta}{AGH}$ és rectangle per tant $\overline{AG} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{AH}^2} =$

$$= \sqrt{\frac{a^2\sin^2\alpha}{9} + \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2\sin^2\alpha + 9c^2}}{6} = \frac{\sqrt{4a^2\sin^2\alpha + 9(2a\cdot\cos\alpha)^2}}{6} =$$

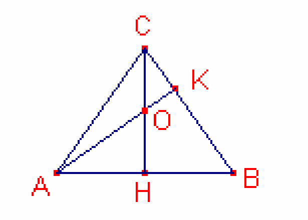
$$= \frac{a}{3}\sqrt{\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}.$$

Aleshores, $\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{a}{2}\sqrt{\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}$.

Per tant: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{2a\cdot\cos\alpha}{\frac{a}{2}\sqrt{\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}} = \frac{4\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}}.$$

Problema 15
Determineu els angles d'un triangle isòsceles si sabem que l'ortocentre divideix per la meitat l'altura traçada sobre la base.

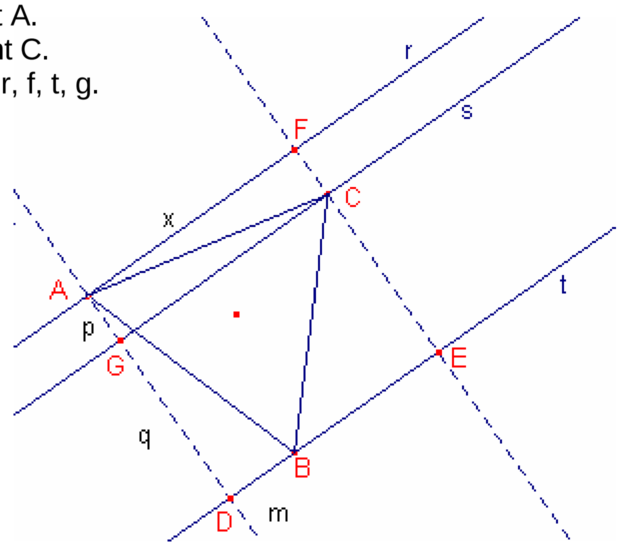
Solució:



Siguen $\overline{BC} = \overline{AC} = a$, $\overline{AB} = c$, $\hat{A} = \alpha$.
Siguen les altures $\overline{CH}$, $\overline{AK}$,
l'ortocentre O, $\alpha = \angle AOH$. $\overline{OH} = \overline{CO} = x$.
El triangle $\overset{\Delta}{ACH}$ és rectangle per tant $tg\alpha = \dfrac{4x}{c}$.
El triangle $\overset{\Delta}{AOH}$ és rectangle per tant $tg\alpha = \dfrac{c}{2x}$.
Considerem el sistema $\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{4x}{c} \\ tg\alpha = \dfrac{c}{2x} \end{cases}$ multiplicant ambdues equacions queda,
$tg^2\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\sqrt{2}$.
Per tant $\hat{A} = \alpha = arctg\sqrt{2}$ $\qquad \hat{C} = 180º - 2\alpha = 180º - 2arctg\sqrt{2}$.

Problema 16
Les rectes r, s, t són paral·leles, s està entre les altres dues a una distància p, q respectivament.
Calculeu el costat d'un triangle equilàter els vèrtexs del qual estan sobre les 3 rectes.

Solució:
Siga la recta f perpendicular a r que passa pel punt A.
Siga la recta g perpendicular a r que passa pel punt C.
Siga el rectangle ADEF que determinen les rectes r, f, t, g.
Siguen $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$
Siguen $\overline{AD} = p + q$ $\quad \overline{AF} = x$ $\quad \overline{DB} = m$
Els triangle $\overset{\Delta}{AFC}$, $\overset{\Delta}{ADB}$, $\overset{\Delta}{BCE}$ són rectangles.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$a^2 = p^2 + x^2$.
$a^2 = (p + q)^2 + m^2$.
$a^2 = q^2 + (x - m)^2$.

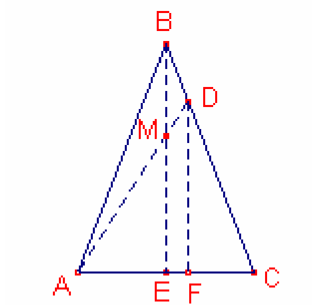


Considerem el sistema $\begin{cases} a^2 = p^2 + x^2 \\ a^2 = (p+q)^2 + m^2 \\ a^2 = q^2 + (x - m)^2 \end{cases}$.

Resolent el sistema queda $a = \dfrac{2\sqrt{p^2 + q^2 + pq}}{\sqrt{3}}$.

Problema 17

Siga un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$. En el costat $\overline{BC}$ determineu el punt D tal que $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{1}{4}$. Calculeu $\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}}$ on M és la intersecció del segment $\overline{AD}$ i l'altura $\overline{BE}$.



Solució:

Siga $\overline{BC}=5a \Rightarrow \overline{BD}=a \quad \overline{DC}=4a$. Siguen $\overline{AE}=y \quad \overline{AF}=x$.

El triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és rectangle per tant $\overline{BE}=\sqrt{25a^2-y^2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{FDC}$ són semblants, per tant $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}}$.

$$\frac{\sqrt{25a^2-y^2}}{y}=\frac{\overline{DF}}{2y-x} \quad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EBC}$, $\overset{\Delta}{FDC}$ són semblants, per tant $\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{FC}}$.

$$\frac{5a}{y}=\frac{4a}{2y-x} \Rightarrow 6y=5x.$$

Substituint en (1)

$$\overline{DF}=\frac{4}{5}\sqrt{25a^2-y^2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AME}$, $\overset{\Delta}{ADF}$ són semblants, per tant $\frac{\overline{ME}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}$.

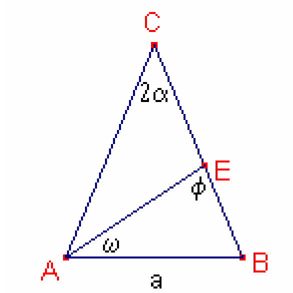
$$\frac{\overline{ME}}{y}=\frac{\frac{4}{5}\sqrt{25a^2-y^2}}{x} \Rightarrow \overline{ME}=\frac{2}{3}\sqrt{25a^2-y^2}.$$

$$\overline{BM}=\overline{BE}-\overline{ME}=\sqrt{25a^2-y^2}-\frac{2}{3}\sqrt{25a^2-y^2}=\frac{1}{3}\sqrt{25a^2-y^2}.$$

Aleshores, $$\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{25a^2-y^2}}{\frac{2}{3}\sqrt{25a^2-y^2}}=\frac{1}{2}.$$

Problema 18

La base d'un triangle isòsceles és a. L'angle oposat a la base 2α.
Calculeu la bisectriu sobre el costat lateral.



Solució:

Siguen $\overline{AB}=a \quad \hat{C}=2\alpha \quad \hat{A}=\hat{B}=90^o-\alpha$.

Siga la bisectriu $\overline{AE}$. Siguen $\angle EAB=\omega, \angle AEB=\phi$.

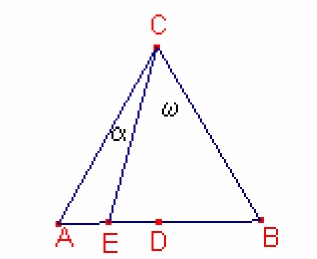
$$\omega=\frac{90^o-\alpha}{2} \qquad \phi=180^o-(\omega+\hat{B})=45^o+\frac{3}{2}\alpha.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEB}$:

$$\frac{a}{\sin\phi}=\frac{\overline{AE}}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\left(45^o+\frac{3}{2}\alpha\right)}=\frac{\overline{AE}}{\sin(90^o-\alpha)} \Rightarrow \overline{AE}=\frac{a\cdot\cos\alpha}{\sin\left(45^o+\frac{3}{2}\alpha\right)}.$$

Problema 19

En un triangle equilàter es traça un segment que uneix un vèrtex i un punt E del costat oposat tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{2}$. Calculeu l'angle que forma aquest segment i cada costat.



Solució:
Siga l'altura $\overline{CD}$.
Siga $\angle ACE=\alpha$, $\angle ECB=\omega$.
Siga $\overline{AB}=3a \quad \Rightarrow \quad \overline{AE}=a \quad \overline{EB}=2a$.
$\overline{ED}=\overline{AD}-\overline{AE}=\frac{3}{2}a-a=\frac{1}{2}a$.

El triangle $\overset{\Delta}{DCB}$ és rectangle per tant $\overline{CD}=\sqrt{(3a)^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}=\frac{3a}{2}\sqrt{3}$.

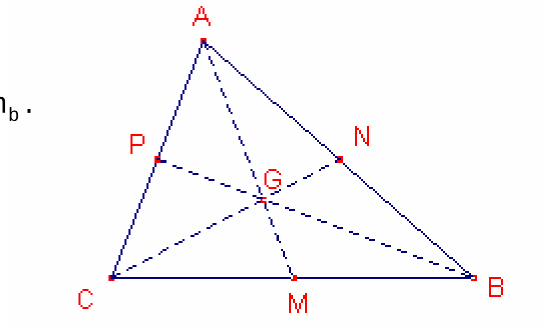
El triangle $\overset{\Delta}{DCE}$ és rectangle per tant, $\overline{CE}=\sqrt{\overline{ED}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+9a^2-\frac{9}{4}a^2}=a\sqrt{7}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CEB}$ $\frac{\overline{CE}}{\sin 60^o}=\frac{\overline{EB}}{\sin\omega}$.

$\frac{a\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2a}{\sin\omega} \quad \Rightarrow \quad \sin\omega=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. $\omega=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$ $\quad \alpha=60^o-\omega=60^o-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$.

Problema 20

Demostreu que en tot triangle la suma de les mitjanes és major que $\frac{3}{4}$ del perímetre, però menor que el perímetre.



Solució:
Siguen les mitjanes $\overline{AM}=m_a \quad \overline{CN}=m_c \quad \overline{BR}=m_b$.
Siga el baricentre G.
Siguen $S=m_a+m_b+m_c \quad P=a+b+c$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CGB}$ $\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c>a$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AGC}$ $\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_c>b$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AGB}$ $\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b>c$.
Sumant les 3 inequacions:
$\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)>a+b+c \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}S>P$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ $m_a<\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BNR}$ $m_b<\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CNR}$ $m_c<\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.
Sumant les desigualtats:
$m_a+m_b+m_c<a+b+c \quad \Rightarrow \quad S<P$.