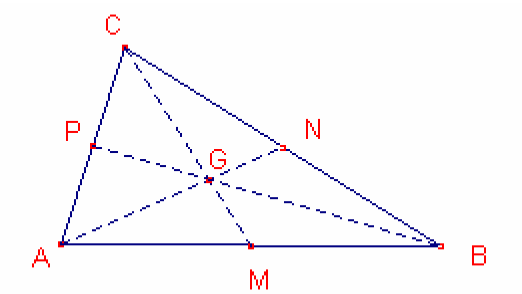
Problemes del 21 al 30

Problema 21
Determineu la raó que hi ha entre la suma des quadrats de les mitjanes i la suma dels quadrats dels costats d'un triangle.



Solució:
Siguen les mitjanes $\overline{AN}, \overline{CM}, \overline{BP}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACM}$

$$\overline{CM}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos\hat{A}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BAN}$,

$$\overline{AN}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos\hat{B}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CBP}$,

$$\overline{BP}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos\hat{C}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$$

Per tant,

$$\frac{\overline{CM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{BP}^2}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

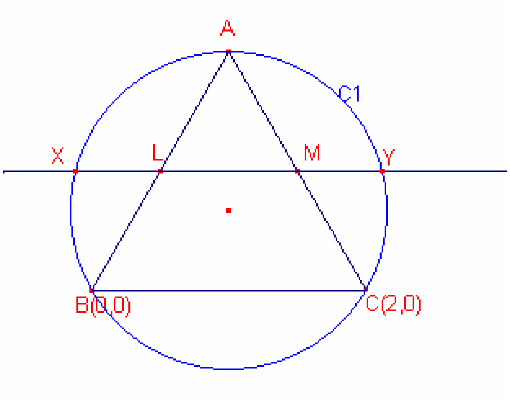
$$= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos\hat{A} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos\hat{B} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos\hat{C}}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$\frac{\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

Problema 22

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.
Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.
Proveu que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$



Solució 1: (Amb coordenades cartesianes).

Considerem El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, tal que B(0,0), C(2,0).
Per ser el triangle equilàter $A(1,\sqrt{3})$
Les coordenades dels punts L, M són: $L\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O i radi R.

El centre O té coordenades $O\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència circumscrita C1 és: $R=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

L'equació de la circumferència C1 és: $C1 \equiv (x-1)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$

L'equació de la recta r que passa pels punts L, M és: $r \equiv y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Les interseccions de la circumferència C1 i la recta r són: $X\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Y\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overline{LM}=1$

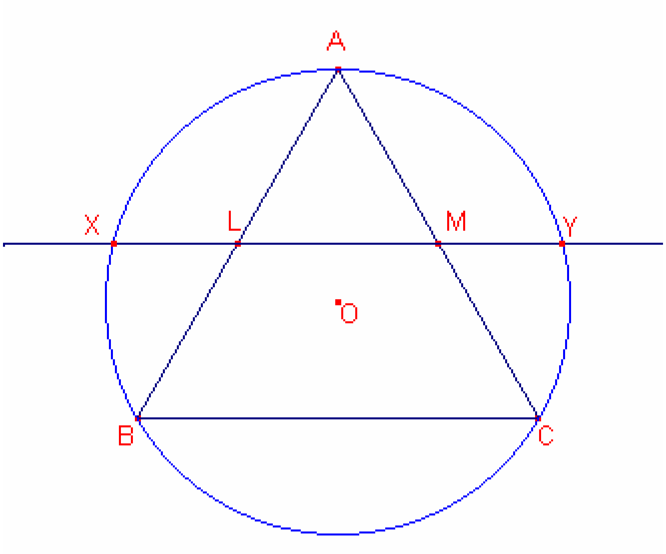
$\overline{LY}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\overline{MY}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Aleshores:

$\dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi \qquad \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$

Solució 2 trigonomètrica:



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $AB = 2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ALC}$,

$CL = \sqrt{3}$

Aleshores $LM = 1$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{OLM}$

Per la propietat del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$OL = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

L'angle $\angle MLO = 30º$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{LOY}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LOY}$,

$$\overline{OY}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{LY}^2 - 2 \cdot \overline{OY} \cdot \overline{LY} \cdot \cos 30º$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \overline{LY}^2 - \overline{LY}$$

Simplificant:

$$\overline{LY}^2 - \overline{LY} - 1 = 0$$

Aleshores,

$$\overline{LY} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Problema 23

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de incentre I.
Siga P el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punts B, I.
Siga Q el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punt C, I.

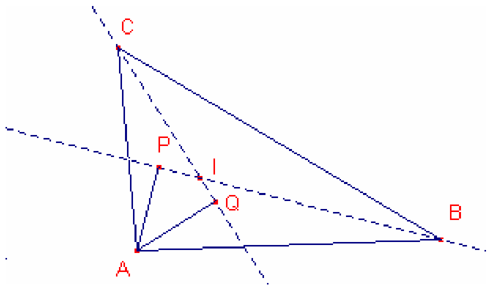
Aleshores, $\frac{\overline{AP}}{\overline{BI}}+\frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}}=\cot\left(\frac{A}{2}\right)$

Solució: Problema2102 Crux resolt per Panos E. Tsaoussoglou (Grècia).

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$, $\sin\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQC}$, $\sin\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$

Aleshores, $\overline{AP}=\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{B}{2}\right)$, $\overline{AQ}=\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{C}{2}\right)$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABI}$, $\frac{\overline{BI}}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\overline{AB}}{\sin\left(180^{o}-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right)}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACI}$, $\frac{\overline{CI}}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\overline{AB}}{\sin\left(180^{o}-\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\right)}$

Aleshores, $\overline{BI}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$, $\overline{CI}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BI}}+\frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}}=\frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin\left(90^{o}-\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

Problema 24

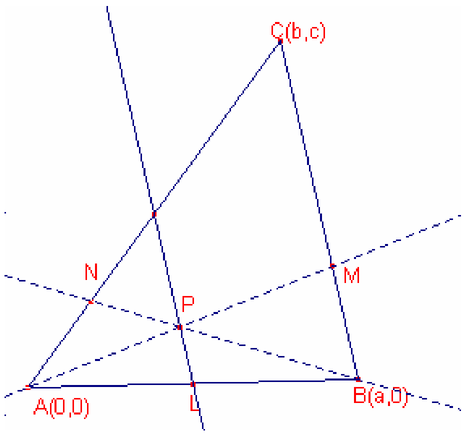
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores, $\text{tg } A+\text{tg } B+\text{tg } C=\text{tg } A\cdot\text{tg } B\cdot\text{tg } C$.

Solució:
$A+B+C=180º$.

$$\text{tg } A+\text{tg } B+\text{tg } C=\text{tg } A+\text{tg } B+\text{tg }(180º-(A+B))=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}-\frac{\sin(A+B)}{\cos C}=$$
$$=\frac{\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}-\frac{\sin(A+B)}{\cos C}=$$
$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cdot\cos B}-\frac{\sin(A+B)}{\cos C}=$$
$$=\sin(A+B)\cdot\frac{\cos C-\cos A\cdot\cos B}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}=$$
$$=\sin C\cdot\frac{-\cos(A+B)-\cos A\cdot\cos B}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}=$$
$$=\sin C\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}=$$
$$=\text{tg } A\cdot\text{tg } B\cdot\text{tg } C$$

Problema 25

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga el punt L sobre AB tal que 2 AL = AB. Siga M sobre BC tal que 3 BM = BC. Siga N sobre AC tal que 4 AN = AC.
Siga P la intersecció de AM amb BN.
Demostreu que LP és paral·lel a BC.



Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ situat en el plànol cartesià:
A(0, 0), B(a, 0), C(b, c).
Les coordenades dels punts L, M, N són:

$$L\left(\frac{a}{2},0\right)\ M\left(\frac{2a+b}{3},\frac{c}{3}\right),\quad N\left(\frac{b}{4},\frac{c}{4}\right)$$

Siga la recta r que passa pels punts A, M la seua equació és:

$$r\equiv y=\frac{c}{2a+b}x$$

Siga la recta s que passa pels punts B, N la seua equació és:

$$s\equiv y=\frac{c}{b-4a}(x-a)$$

Determinem el punt P intersecció de les rectes r, s.

$$P\left(\frac{2a+b}{6},\frac{c}{6}\right)$$

Determinem el vector $\vec{LP}$, $\overrightarrow{LP}=\left(\frac{b-a}{6},\frac{c}{6}\right)$

Determinem el vector $\overrightarrow{BC}$, $\vec{BC}=(b-a,c)$

Els vectors $\vec{BC},\vec{LP}$ són proporcionals, $\overrightarrow{BC}=6\cdot\overrightarrow{LP}$.
Per tant, el segment LP és paral·lel al segment BC.

Problema 26

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\hat{C}=2\cdot\hat{B}$.
Proveu que $c^2=(a+b)b$.

Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin 2B}=\frac{c}{2\cdot\sin B\cdot\cos B}$$

Aleshores, $\cos B=\frac{c}{2b}$ (1)

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$

Substituint (1)

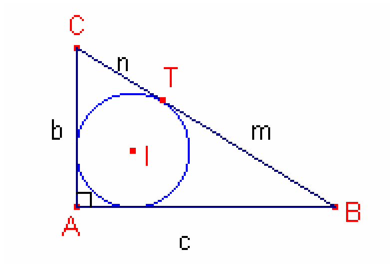
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\frac{c}{2b}$$

$$b^2-a^2=c^2-\frac{a}{b}c^2,\quad b^2-a^2=c^2\left(1-\frac{a}{b}\right)$$

Aleshores, $c^2=(b^2-a^2)\left(\frac{b}{b-a}\right)=(a+b)b$.

Problema 27

L'àrea d'un triangle rectangle és igual al producte dels segments determinats per la circumferència inscrita en la hipotenusa.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle $A=90^o$.
Siguen n, m els dos segments que determinen la circumferència inscrita en la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S=\frac{bc}{2}$.

Siga el semiperímetre del triangle $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Aleshores, $m=p-b,\quad n=p-c$

$$m\cdot n=(p-b)(p-c)=\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=$$

$$=\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4}=$$

$$=\frac{a^2+ab-ac+ac+bc-c^2-ab-b^2+bc}{4}=\frac{a^2+2bc-c^2-b^2}{4}=$$

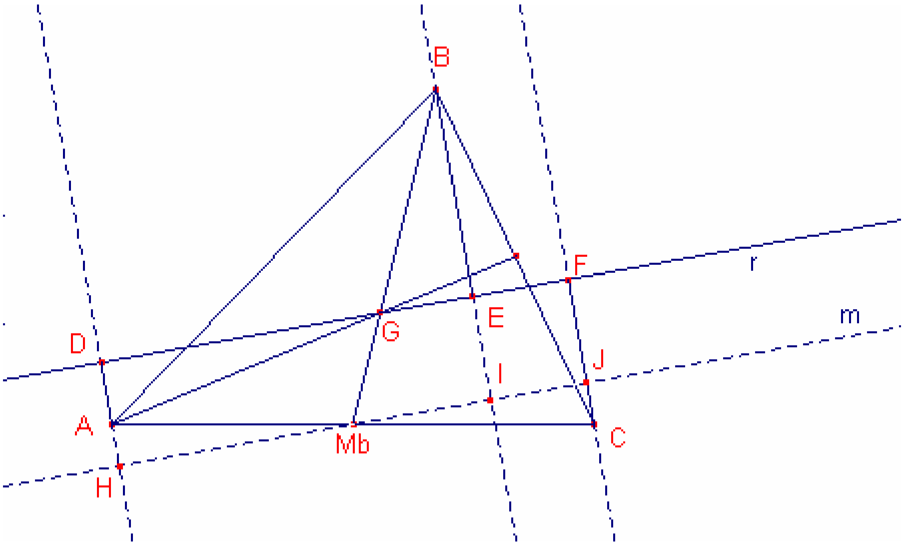
$$=\frac{bc}{2}$$

Per tant, $m\cdot n=\frac{bc}{2}$, és a dir l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Problema 28

Si pel baricentre d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tracem la recta r que talla els costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, aleshores, la distància de B a la recta r és igual a la suma de les distàncies dels altres dos vèrtexs a la recta.

Solució:



Considerem el punt mig M_b del segment $\overline{AC}$.
La recta m paral·lela a la recta r que passa pel punt M_b.
Siga D el punt projecció de A sobre la recta r.
Siga E el punt projecció de B sobre la recta r.
Siga F el punt projecció de C sobre la recta r.

Siga H el punt projecció de A sobre la recta n.
Siga I el punt projecció de B sobre la recta n.
Siga J el punt projecció de C sobre la recta n.

Per la propietat del baricentre $\frac{\overline{BG}}{\overline{GM_b}} = 2$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BGE}, \overset{\Delta}{BM_bI}$ són semblants.

Aleshores, $\frac{\overline{BE}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GM_b}} = 2$.

Per tant, $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EI} = 2 \cdot \overline{FJ}$

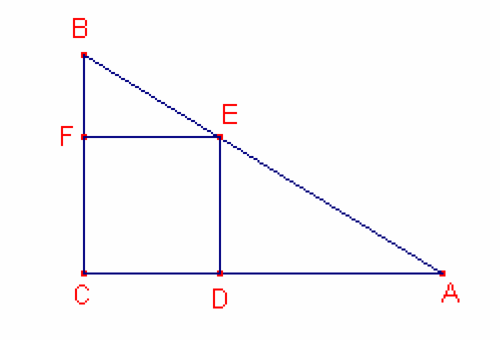
Els triangles $\overset{\Delta}{AHM_b}, \overset{\Delta}{CJM_b}$ són iguals, aleshores, $\overline{AH} = \overline{CJ}$.

$\overline{CF} + \overline{AD} = \overline{FJ} + \overline{CJ} + \overline{AD} = \overline{FJ} + \overline{AH} + \overline{AD} = \overline{FJ} + \overline{DH} = 2 \cdot \overline{FJ} = \overline{BE}$.

Problema 29
En un triangle rectangle de catets a, b s'ha inscrit un quadrat tal que té amb el triangle l'angle recte comú. Determineu el costat del quadrat.

Solució:

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^o$ de catets a, b.

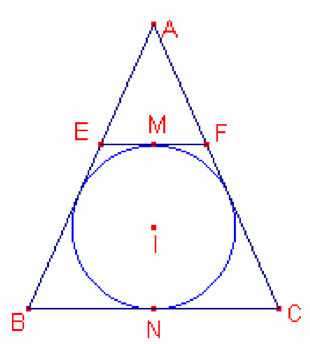


Siga $x = \overline{CD}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BFE}, \overset{\Delta}{EDA}$ són semblants, aleshores, $\frac{\overline{FB}}{\overline{\overline{FE}}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{\overline{DA}}}$, és a dir:

$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}$, resolent l'equació: $x = \frac{ab}{a+b}$.

Problema 30
La base d'un triangle isòsceles és 2a i l'altura h. A la circumferència inscrita al triangle se li ha traçat una tangent paral·lela a la base. Determineu la mesura del segment que forma la tangent i els costats del triangle.



Solució:

Siga $x = \overline{EF}$ el segment format per la tangent.
Siga $r = \overline{IN}$ el radi de la circumferència inscrita.

Calculem els costats iguals del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ANC}$.

$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + h^2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S = \frac{2ah}{2}$, o bé utilitzant la fórmula de radi de la circumferència inscrita: $S = r \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2+h^2} + \sqrt{a^2+h^2}}{2}$.

Igualant les àrees, $ah = r\left(a + \sqrt{a^2+h^2}\right)$, aleshores, $r = \frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AEF}$ són semblants, aleshores,

$\frac{2a}{h} = \frac{x}{h-2r}$.

Aleshores, $x = \frac{2a(h-2r)}{h} = \frac{2a(-a+\sqrt{a^2+h^2})}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$.