Problemes del 31 al 40

Problema 31

En un triangle rectangle els catets mesuren b i c. Determineu la distància entre els centres de les circumferències inscrita i circumscrita.

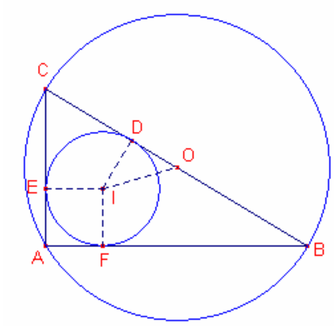
Solució:

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $c = \overline{AB}, b = \overline{AC}$.

Siguen D, E, F els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ rectangle el circumcentre és el punt mig de la hipotenusa.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.



$r = \overline{AE} = \overline{AF} = \dfrac{a+b+c}{2} - a$, $R = \overline{OC} = \dfrac{a}{2}$.

$\overline{CE} = \overline{CD} = b - r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $\overline{DO} = \overline{OC} - \overline{CD} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{a-b+c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DIO}$:

$d^2 = r^2 + \overline{DO}^2 = \dfrac{3a^2 - 2a(b+c)}{4}$, aleshores,

$$d = \frac{\sqrt{3a^2 - 2a(b+c)}}{2} = \frac{\sqrt{3\left(b^2 + c^2\right) - 2(b+c)\sqrt{b^2+c^2}}}{2}.$$

O bé, aplicant la fórmula d'Euler de la distància entre l'incentre i el circumcentre:

$d^2 = R^2 - 2Rr$.

Problema 32

Proveu que l'àrea d'un triangle qualsevol és menor que $\dfrac{1}{2}\pi R^2$ on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

Solució:

Siga un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant la fórmula trigonomètrica de l'àrea d'un triangle: $S = \dfrac{ab\sin C}{2}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle:

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R$ on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

$S = \dfrac{ab\sin C}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$. Provem que $\sin A \sin B \sin C < \dfrac{\pi}{4}$.

$\sin A \sin B \sin C = \sin A \sin B \sin(180 - (A+B)) = \sin A \sin B \sin(A+B) =$

Aplicant transformacions de productes de sinus en sumes:

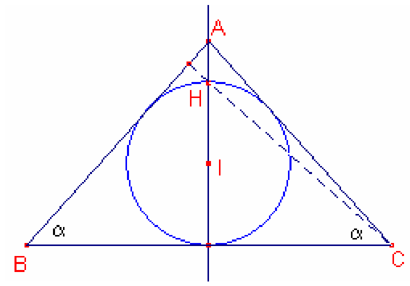
$$= \frac{1}{2}(-\cos(A+B) + \cos(A-B))\sin(A+B) = \frac{1}{2}(-\cos(A+B)\sin(A+b) + \cos(A-b)\sin(A+B)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\sin(2A+2B) + \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin(2B))\right) = \frac{1}{4}(-\sin(2A+2B) + \sin 2A + \sin 2B) \leq \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$$

Aleshores: $S = \dfrac{ab\sin C}{2} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C < 2R^2 \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\pi R^2$.

Problema 33
En un triangle isòsceles l'ortocentre està en la circumferència inscrita.
Determineu els angles.

Solució:



Considerem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=\overline{AC}$ situats en el plànol cartesià.
$B(-a,0), C(a,0), A(0,b)$
Siga $I(0,r)$ l'incentre.
L'ortocentre H ha d'estar en la perpendicular al costat desigual.
Per tant $H(0,2r)$.

Considerem el vector $\vec{BA}=(a,b)$

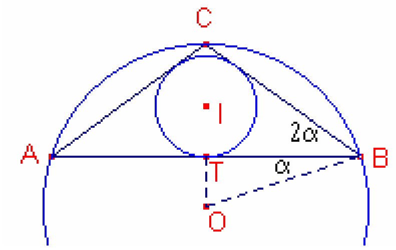
Considerem el vector $\vec{CH}=(-a,2r)$

Els vectors $\vec{BA},\vec{CH}$ són perpendiculars, aleshores el seu producte escalar és zero.
$(a,b)\cdot(-a,2r)=0$, per tant, $-a^2+2br=0$ (1)
Siga la recta f que passa pels punts A, C que té per equació:
$f\equiv y=\frac{b}{a}(x+a)$. Simplificant-la: $bx-ay+ab=0$
La distància del incentre I a la recta f és igual al radi r de la circumferència inscrita, per tant:
$\left|\frac{-ar+ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=r$, elevant al quadrat, $\frac{a^2(b-r)}{a^2+b^2}=r^2$ (2)
Considerem el sistema format per (1) i (2)
$$\begin{cases}-a^2+2br=0\\ a^2(b-r)=r^2(a^2+b^2)\end{cases}$$
Resolent-lo en les incògnites a, b queda:
$$\begin{cases}a=\sqrt{5}\,r\\ b=\frac{5}{2}r\end{cases}$$

Siga $\alpha=\angle ABC=\angle ACB$, $\beta=\angle BAC$.
$\mathrm{tg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, aleshores, $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 48^o11'23''$
$\beta=2\cdot\mathrm{arctg}\frac{a}{b}=2\cdot\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt{5}}{5}\approx 83^o37'14''$

Problema 34

Determineu els angles d'un triangle sabent que els centres de les circumferències inscrita i circumscrita són simètrics respecte d'un costat.



Solució:

Com que l'incentre sempre està a l'interior de la circumferència, en aquest cas el circumcentre està en l'exterior de la circumferència. Per tant el triangle és obutsangle.

Si l'incentre I i l'ortocentre O són simètrics respecte d'un costat el triangle és isòsceles. $\overline{IT} = \overline{TO}$.

Siga $2\alpha = \angle ABC$.

Aleshores, $\alpha = \angle TBI = \angle TBO$.

Com que $\overline{OB} = \overline{OC}$, el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és isòsceles. Per tant, $\angle OCB = 3\alpha$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{TOB}$ rectangle. Per tant, $\angle TOB = 90º - \alpha$.

Aplicant que la suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és 180º:

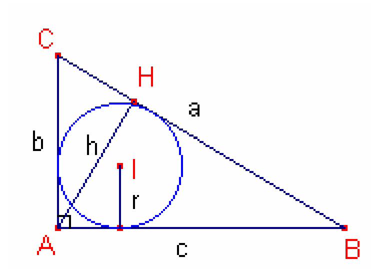
$3\alpha + 3\alpha + 90º - \alpha = 180º$. Aleshores, $\alpha = 18º$.

Per tant el angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són: $\angle BAC = \angle ABC = 2\alpha = 36º$, $\angle ACB = 108º$.

Problema 35

En qualsevol triangle rectangle s'acompleix la seguen desigualtat:

$0'4 < \frac{r}{h} < 0'5$ on r és el radi de la circumferència inscrita i h és l'altura sobre la hipotenusa.



Solució:

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita. Siga h l'altura sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S = r\frac{a+b+c}{2}$ $\qquad S = \frac{ah}{2}$

Igualant les àrees:

$r\frac{a+b+c}{2} = \frac{ah}{2}$, aleshores, $\frac{r}{h} = \frac{a}{a+b+c}$.

Dividint per a:

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{1}{1+\sin B+\cos B}$$

Provem que $\sin B + \cos B < 1'5$, $\sin B + \cos B > 1$.

$\sin B + \cos B = \sin B + \sin(90º - B) = 2\sin 45º\cos(B - 45º) = \sqrt{2}\cos(B - 45º) \leq \sqrt{2} < 1'5$.

Suposem que $\sin B + \cos B \leq 1$ $\quad 0º < B < 90º$.

$(\sin B + \cos B)^2 \leq 1$

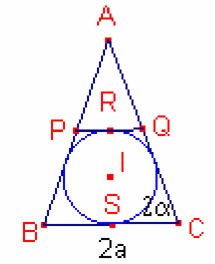
$\sin^2 B + \cos^2 B + 2\sin B\cos B \leq 1$, aleshores, $\sin 2B \leq 0$, $0º < 2B < 180º$ la qual cosa és un absurd. Per tant, $\sin B + \cos B > 1$.

$\frac{r}{h} = \frac{1}{1+\sin B+\cos B} < \frac{1}{1+1} = 0'5$ $\qquad \frac{r}{h} = \frac{1}{1+\sin B+\cos B} > \frac{1}{1+1'5} = 0'4$.

Aleshores, $0'4 < \frac{r}{h} < 0'5$.

Problema 36

En un triangle isòsceles el costat desigual mesura 2a i el angles iguals mesurem 2α cadascun. A la circumferència inscrita se li a traçat una tangent paral·lela al costat desigual. Determineu la mesura del segment que forma la paral·lela i els costats del triangle.



Solució:

Considerem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Siga $\overline{BC} = 2a$, $\angle ABC = 2\alpha$.

Siga $h = \overline{AS}$, aleshores, $h = a \cdot tg2\alpha$.

Siga $r = \overline{IS}$, radi de la circumferència inscrita, aleshores, $r = a \cdot tg\alpha$

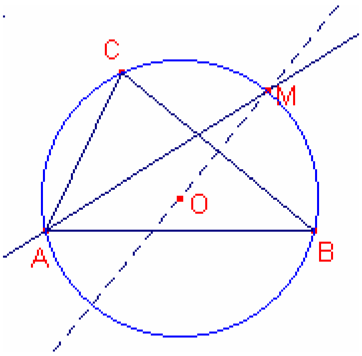
Els triangles $\overset{\Delta}{ARQ}$, $\overset{\Delta}{ASC}$ són semblants, aleshores,

$\frac{\overline{RQ}}{a} = \frac{h - 2r}{h}$, per tant, $\overline{RQ} = a\left(1 - \frac{2r}{h}\right) = a\left(1 - 2\frac{a \cdot tg\alpha}{a \cdot tg2\alpha}\right) = a \cdot tg^2\alpha$.

Aleshores, $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{RQ} = 2a \cdot tg^2\alpha$.

Problema 37

Proveu que la bisectriu d'un angle d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i la mediatriu del costat oposat es tallen en un punt de la circumferència circumscrita.



Solució:

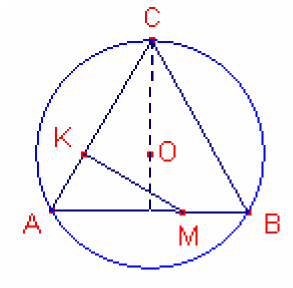
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i la bisectriu a l'angle A.

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga el punt M intersecció de la bisectriu a l'angle A i la circumferència circumscrita al triangle.

Aleshores els arcs $\overset{\frown}{BM}$ $\overset{\frown}{MC}$ són iguals. Per tant, $\overline{BM} = \overline{MC}$, és a dir, M pertany a la mediatriu del costat $\overline{BC}$.

Problema 38

Donat un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AM}:\overline{MB}=2:1$.
Siga K un punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AK}:\overline{KC}=1:2$.
Proveu que $\overline{MK}$ mesura el mateix que el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:

Siga triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coincideixen el baricentre, el circumcentre.
Siga O el circumcentre del triangle.
Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del triangle és

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre el radi R de la circumferència circumscrita al triangle és: $R=\overline{OC}=\frac{2}{3}h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Com que $\overline{AM}:\overline{MB}=2:1$, $\overline{AM}=\frac{2}{3}a$. Com que $\overline{AK}:\overline{KC}=1:2$, $\overline{AK}=\frac{1}{3}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMK}$.

$$\overline{MK}^2=\overline{AM}^2+\overline{AK}^2-2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{AK}\cdot\cos 60^{\circ}=$$

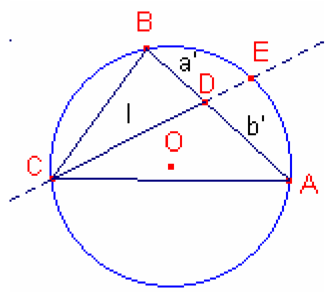
$$=\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2-\frac{2}{3}a\frac{1}{3}a\frac{1}{2}=\frac{1}{3}a^2$$

Aleshores, $\overline{MK}=\sqrt{\frac{1}{3}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=R$.

Problema 39

Demostreu que si a, b són els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i l la bisectriu de l'angle que formen els dos costats i a', b' els segments amb què la bisectriu divideix el costat c, aleshores, $l^2=ab-a'b'$.

Solució:



Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga D la intersecció de la bisectriu al vèrtex C i el costat oposat.
Siga E la intersecció de la bisectriu i la circumferència circumscrita al triangle.

Els triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ECA}$ són semblants (tenen els angles iguals).
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{CB}},\text{ per tant, }\frac{b}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CD}+\overline{DE}}{a},\quad \overline{CD}^2=ab-\overline{CD}\cdot\overline{ED}\qquad(1)$$

Aplicant la potència del punt D respecte de la circumferència circumscrita al triangle:

$$\overline{CD}\cdot\overline{ED}=\overline{BD}\cdot\overline{AD}\text{, és a dir, }\overline{CD}\cdot\overline{ED}=a'\cdot b'\qquad(2)$$

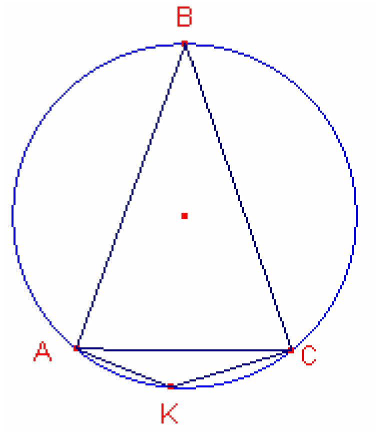
Substituint (2) en (1): $\overline{CD}^2=ab-a'\cdot b'$.

Problema 40

En una circumferència està inscrit un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Siga un punt K qualsevol de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

Aleshores, $\overline{AK} \cdot \overline{KC} = \overline{BK}^2 - \overline{AB}^2$.



Solució:

un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB} = \overline{BC}$ inscrit en una circumferència.

Siga $\alpha = \angle BAK$, aleshores, $\angle BCK = 180º-\alpha$

Notem que $\angle AKB = \hat{C}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$\frac{\overline{BK}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \text{ aleshores, } \sin\alpha = \frac{\overline{BK}\sin C}{\overline{AB}} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$\frac{\overline{AK}}{\sin(180º-(\alpha + C))} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \text{ per tant, } \frac{\overline{AK}}{\sin(\alpha + C)} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \qquad (2)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCK}$:

$$\frac{\overline{KC}}{\sin(\alpha - C)} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \qquad (3)$$

Multiplicant (2) i (3):

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\sin(\alpha + C)\sin(\alpha - C)} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C}$$

Transformant productes de sinus en sumes:

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\frac{-1}{2}(\cos(2\alpha) - \cos(2C))} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C}$$

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\sin^2\alpha - \sin^2 C} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C} \qquad (4)$$

Substituint (1) en (4):

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\left(\frac{\overline{BK}\sin C}{\overline{AB}}\right)^2 - \sin^2 C} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C}$$

Simplificant:

$\overline{AK} \cdot \overline{KC} = \overline{BK}^2 - \overline{AB}^2$.