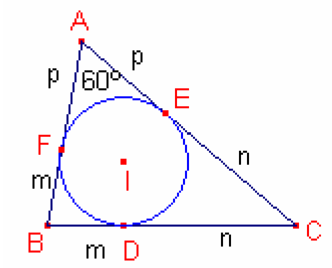
**Problema 41**

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\hat{A}=60^o$.
El punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle divideix el costat $\overline{BC}$ en dos segments de longituds m, n. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




Solució:

Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi r.
Siguen D, E, F els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats.
Siga $\overline{BD}=m, \overline{DC}=n$, aleshores, $\overline{BF}=m, \overline{CE}=n$.
Siga $p=\overline{AE}$, aleshores, $\overline{AF}=p$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIE}$: $tg30^o=\frac{r}{p}$, per tant, $r=\frac{\sqrt{3}}{3}p$

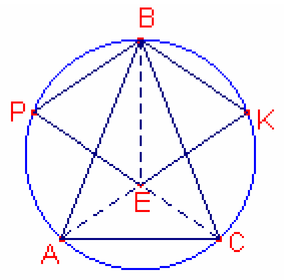
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S=r\cdot(m+n+p)=\frac{\sqrt{3}}{3}p(m+n+p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(p^2+(m+n)p\right) \quad (1).$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$(m+n)^2=(m+p)^2+(n+p)^2-2(m+p)(n+p)\cos 60^o$.
Simplificant:
$p^2+(m+n)p-3mn=0$, aleshores, $p^2+(m+n)p=3mn \quad (2)$.
Substituint (2) en (1):
$S=\sqrt{3}\cdot mn$

**Problema 42**

En un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BA}=\overline{BC}$ està circumscrita una circumferència.
Les continuacions de les bisectrius dels vèrtexs A, C tallen la circumferència en els punts K i P, respectivament i entre si en el punt E.
Demostreu que el quadrilàter BKEP és un rombe.




Solució:
Per ser $\overline{AK}, \overline{CP}$ bisectrius d'angles iguals tenim que els arcs PB i KB són iguals, aleshores, $\overline{PB}=\overline{BK}$.

Notem que E és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Considerem l'angle $\angle PBE$.

Per ser un angle inscrit a la circumferència, $\angle PBE=\frac{A+B}{2}$.

Considerem l'angle $\angle PEB$.

Per ser un angle interior a la circumferència, $\angle PEB=\frac{A+B}{2}$.

Per tant el triangle $\overset{\Delta}{PEB}$ és isòsceles, aleshores, $\overline{PB}=\overline{PE}$.
Anàlogament, $\overline{BK}=\overline{EK}$.
Aleshores el quadrilàter BKEP és un rombe.

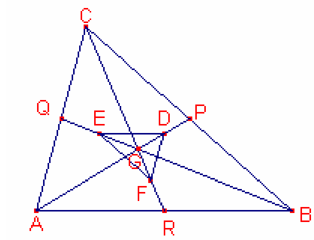
**Problema 43**

En cadascuna de les mitjanes d'un triangle hem agafat un punt que divideix la mitjana en la raó 5:1 contant des del vèrtex. Calculeu l'àrea del triangle determinat pels punts anteriors si l'àrea del triangle inicial és S.

Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen les mitjanes $m_a = \overline{AP}, m_b = \overline{BQ}, m_c = \overline{CR}$

Siguen els punts D, E, F tal que $\overline{AD} = \frac{5}{6}m_a$, $\overline{BE} = \frac{5}{6}m_b$, $\overline{CF} = \frac{5}{6}m_c$.




Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Per la propietat del baricentre:
$\overline{CG} = \frac{2}{3}m_c$

Vegem que els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{DEF}$ són homotètics i G és el centre d'homotècia:

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{CF} - \overline{GC}} = \frac{\frac{2}{3}m_c}{\left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)m_c} = 4.$$ Anàlogament, $\frac{\overline{GA}}{\overline{GD}} = 4$, $\frac{\overline{GB}}{\overline{GE}} = 4$.

Aleshores el triangles són homotètics, G és el centre d'homotècia i la raó $k = -4$.

Per tant la raó de semblança de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{DEF}$ és $4^2$. Per tant,

$4^2 = \frac{\text{Àrea}_{ABC}}{\text{Àrea}_{DEF}} = \frac{S}{\text{Àrea}_{DEF}}$. Aleshores, $\text{Àrea}_{DEF} = \frac{S}{16}$.

**Problema 44**

La recta l és tangent en el punt C a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Demostreu que el quadrat de l'altura $\overline{CH}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual al producte de les distàncies de la recta l als punts A i B.

Solució:

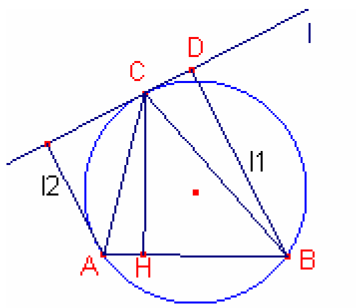
Siguen $l_1 = d(B,l) = \overline{BD}$, $l_2 = d(A,l) = \overline{AE}$. Siga $\overline{CH}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$: $\overline{CH} = a \cdot \sin A$ (1)

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHC}$: $\overline{CH} = b \cdot \sin B$ (2)

Multiplicant les expressions (1), (2): $\overline{CH}^2 = a \cdot b \cdot \sin A \cdot \sin B$ (3)

Per ser C un angle semiinscrit a la circumferència circumscrita del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\angle DCB = A$, $\angle ECA = B$.

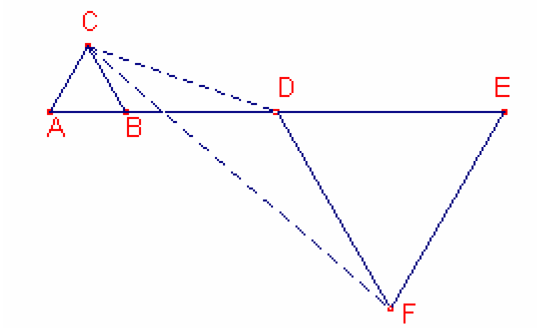



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCB}$:
$l_1 = a \cdot \sin A$ (4).

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ECA}$:
$l_2 = b \cdot \sin B$ (5)
Multiplicant les expressions (4), (5):
$l_1 \cdot l_2 = a \cdot b \cdot \sin A \cdot \sin B$ (6)

De les expressions (3) i (6) tenim que: $\overline{CH}^2 = l_1 \cdot l_2$.

**Problema 45**
Les bases dels triangles equilàters de costats a i 3a romanen en una mateixa recta. Els triangles estan situats en distints costats de la recta i els vèrtexs més pròxims estan separats una distància de 2a.
Determineu la distància entre els vèrtexs dels dos triangles que no romanen en la recta.




Solució:

Considerem els triangle equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ de costats a, 3a respectivament.

Siga $\overline{BD} = 2a$.

Siga $b = \overline{CD}$, $x = \overline{CF}$, $\alpha = \angle CDB$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BDC}$:

$b^2 = a^2 + (2a)^2 - 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^o$.

Simplificant:

$b^2 = 7a^2$, aleshores, $b = \sqrt{7}a$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDC}$:

$\frac{\sqrt{7}a}{\sin 120^o} = \frac{a}{\sin\alpha}$, aleshores, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$, també: $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CFD}$:

$x^2 = \left(\sqrt{7}a\right)^2 + (3a)^2 - 6\sqrt{7}a^2 \cos(120^o + \alpha)$.

Simplificant:

$$x^2 = 16a^2 - 6\sqrt{7}a^2\left(\frac{-1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Substituint els valors de $\sin\alpha, \cos\alpha$:

$$x^2 = 16a^2 - 6\sqrt{7}a^2\left(\frac{-1}{2}\frac{5\sqrt{7}}{14} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{21}}{14}\right), \qquad x^2 = 28a^2.$$

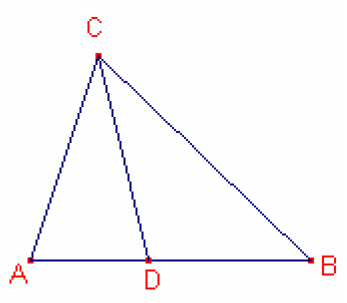
Aleshores, $x = 2\sqrt{7}a$.

**Problema 46**

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga el segment bisectriu $\overline{CD}$.

Proveu que $\overline{CD} = \dfrac{2ab \cdot \cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

Solució:
Aplicant la fórmula trigonomètrica de les àrees:




$$S_{ABC} = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \frac{ab \cdot 2 \cdot \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2}$$

$$S_{ACD} = \frac{b \cdot \overline{CD} \cdot \sin\frac{C}{2}}{2}$$

$$S_{BCD} = \frac{a \cdot \overline{CD} \cdot \sin\frac{C}{2}}{2}$$

$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$, aleshores:

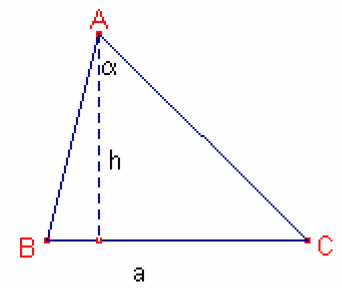
$2ab \cdot \sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \overline{CD} \cdot \sin\frac{C}{2}(a+b)$, aïllant $\overline{CD}$:

$$\overline{CD} = \frac{2ab \cdot \cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

**Problema 47**

La base d'un triangle és a i l'altura és h.
Determineu la suma dels altres dos costats si sabem que l'angle entre ells és $\alpha$.

Solució:




Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a i altura h sobre el costat a. Siga $\alpha = \angle BAC$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S = \dfrac{a \cdot h}{2}$, $S = \dfrac{bc \cdot \sin\alpha}{2}$. Igualant les àrees:

$$bc = \frac{ah}{\sin\alpha}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

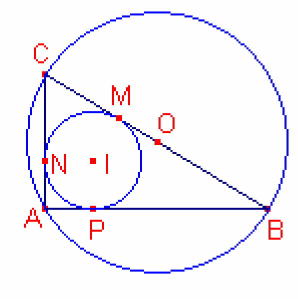
Aleshores, $b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos\alpha = a^2 + 2\dfrac{ah}{\sin\alpha}\cos\alpha$.

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2ah\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{2ah}{\sin\alpha}.$$

Aleshores, $b + c = \sqrt{a^2 + 2ah\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{2ah}{\sin\alpha}}$.

**Problema 48**

Demostreu que en un triangle rectangle $\frac{r}{R} \le \sqrt{2}-1$ on r és el radi de la circumferència inscrita i R el radi de la circumferència circumscrita.




Solució:

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90^{o}$.
Per ser el triangle rectangle el circumcentre és el punt mig de la hipotenusa.

Aleshores, $R = \frac{a}{2}$ (1).

Siguen M, N, P els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle.

Aleshores, $r = \overline{AP} = p - a$ on p és el semiperímetre.

$r = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$b = a \cdot \sin B$, $c = a \cdot \cos B$.

Per tant, $r = \frac{a(\sin B + \cos B - 1)}{2}$ (2)

Dividint (2) entre (1):

$\frac{r}{R} = \sin B + \cos B - 1$.

Considerem la funció $f(B) = \sin B + \cos B - 1$ on $B \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculem el màxim de la funció:
$f'(B) = \cos B - \sin B$
$f'(B) = 0$

$\cos B - \sin B = 0$, aleshores, $B = \frac{\pi}{4}$.

$f''(B) = -\sin B - \cos B$.

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$.

Aleshores, $B = \frac{\pi}{4}$ és un màxim de la funció f(B).

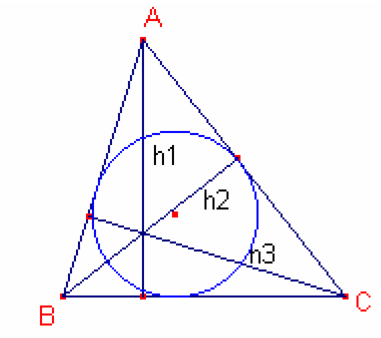
Per tant $\frac{r}{R} = f(B) \le f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$

Nota: Aquesta fita del quocient dels radis és millor que la que dóna el teorema d'Euler dels radis de les circumferències inscrita i circumscrita que era $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$ per a qualsevol triangle.

**Problema 49**

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen $h_1, h_2, h_3$ les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.




Solució:
Siguen $h_1, h_2, h_3$ les altures referides als costats, a, b, c, respectivament.

Calculem l'àrea, del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$S=\frac{a\cdot h_1}{2},\quad S=\frac{b\cdot h_2}{2},\quad S=\frac{c\cdot h_3}{2}$$

$S=r\cdot p$, on r és el radi de la circumferència inscrita i p el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Igualant les àrees tenim que:

$$h_1=\frac{2r\cdot p}{a},\quad h_2=\frac{2r\cdot p}{b},\quad h_3=\frac{2r\cdot p}{c}.$$

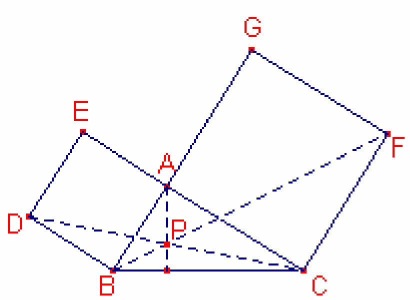
$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{a}{2r\cdot p}+\frac{b}{2r\cdot p}+\frac{c}{2r\cdot p}=\frac{a+b+c}{2r\cdot p}=\frac{2p}{2r\cdot p}=\frac{1}{r}.$$

**Problema 50**

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Sobre els costats $\overline{AB},\overline{AC}$ construïm els quadrats exteriors ABDE, ACFG.
Demostreu que les rectes DC, BF es tallen sobre l'altura relativa al vèrtex A.

Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades cartesianes:
$B(0,0),\ A(a,b),\ C(c,0)$




La recta altura referida al vèrtex A és: $r\equiv x=a$.
Les coordenades de D són: $D(-b,a)$.
Les coordenades de F són: $F(b+c,-a+c)$.
La recta p que passa pels punts B, F és:

$$p\equiv y=\frac{-a+c}{b+c}x.$$

La recta q que passa pel punt C, D és:

$$q\equiv y=\frac{-a}{b+c}(x-c).$$

Determinem el punt P intersecció de les rectes p, q (resolent el sistema format per les dues equacions de les rectes):

$$P\left(a,\frac{-a+c}{b+c}a\right)$$

El punt P pertany a la recta altura r.