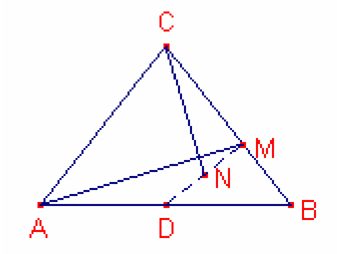
Problemes del 51 al 60

Problema 51

Des del punt mig de la base $\overline{AB}$ del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ s'ha traçat una perpendicular al costat $\overline{BC}$ que talla el costat en el punt M. Siga N el punt mig del segment $\overline{DM}$. Demostreu que els segments $\overline{CN}$, $\overline{AM}$ són perpendiculars.

Solució 1:



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades cartesianes: $A(-c,0), B(c,0), C(0,a)$. Aleshores, $D(0,0)$.

La recta r que passa pels punts B, C té equació: $r \equiv y = \frac{-a}{c}(x-c)$.

La recta s que passa pel punt D i és perpendicular al costat $\overline{BC}$ té per equació: $s \equiv y = \frac{c}{a}x$. El punt M és la intersecció de les rectes r, s:

Aleshores, $M\left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}, \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)$.

N és el punt mig del segment $\overline{DM}$. Aleshores, $N\left(\frac{a^2c}{2(a^2+c^2)}, \frac{ac^2}{2(a^2+c^2)}\right)$.

Calculem les components dels vectors $\vec{CN}$, $\vec{AM}$.

$$\overrightarrow{CN} = \left(\frac{a^2c}{2(a^2+c^2)}, \frac{ac^2}{2(a^2+c^2)} - a\right) \qquad \overrightarrow{AM} = \left(\frac{a^2c}{a^2+c^2}+c, \frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)$$

Calculem el producte escalar dels vectors $\vec{CN}$, $\vec{AM}$:

$$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{AM} = \frac{a^2c}{2(a^2+c^2)}\left(\frac{a^2c+a^2c+c^3}{a^2+c^2}\right)+\left(\frac{ac^2-2a^3-2ac^2}{2(a^2+c^2)}\right)\frac{ac^2}{a^2+c^2}=0$$

Aleshores, $\vec{CN}$, $\vec{AM}$ són perpendiculars.

Solució 2:

Siga $\overline{AB}=2a, \overline{CA}=\overline{CB}=b, \angle CAB=\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{CDB}$, $\overline{CD}=\sqrt{b^2-a^2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CDB}, \overset{\Delta}{DBM}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DM}}$. Per tant, $\overline{DM}=\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, $\quad \overline{NM}=\frac{\overline{DM}}{2}=\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{2b}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BMD}$:

$$\overline{BM}=\sqrt{a^2-\frac{a^2(b^2-a^2)}{b^2}}=\frac{a^2}{b}, \qquad \overline{CM}=b-\frac{a^2}{b}=\frac{b^2-a^2}{b}$$

$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}$, $\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{BM}$. Efectuem el producte escalar i comprovem que és zero.

$$\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=$$

$$=\left\|\overrightarrow{CM}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\cos\alpha+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BM}\right\|\cos 180^\circ+\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos(90^\circ+\alpha)=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{b}\cdot 2a\cdot\frac{a}{b}-\frac{b^2-a^2}{b}\cdot\frac{a^2}{b}+\frac{a}{2b}\sqrt{b^2-a^2}\,2a\left(\frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)=0$$

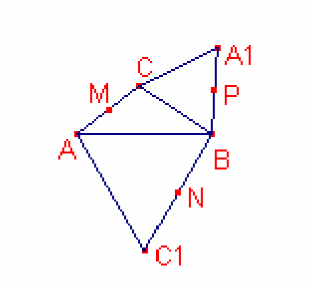
Aleshores, $\vec{CN}$, $\vec{AM}$ són perpendiculars.

Problema 52

Fora dels costats $\overline{AB}, \overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es construeixen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC_1}$, $\overset{\Delta}{BCA_1}$.

Siguen M, N, P els punts mig dels segments $\overline{AC}, \overline{BC_1}, \overline{BA_1}$.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és equilàter.



Solució:
Suposem $B \le 60^o$.
Siga $\alpha = \angle ABM$.

$$\overline{BM}^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$ (fórmula de la mitjana d'un triangle).

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} - c^2}{-2c\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}} = \frac{a^2 - b^2 + 3c^2}{2c\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\sin\alpha = \frac{b\cdot\sin A}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}} = \frac{a\cdot\sin B}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MNB}$:

$$\overline{MN}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{BN}\cdot\overline{BM}\cdot\cos(\alpha + 60^o) =$$

$$= \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}\frac{c}{2}(\cos\alpha\cos 60^o - \sin\alpha\sin 60^o) =$$

$$= \frac{3a^2+3c^2-b^2}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}ac\sin B.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{NBP}$:

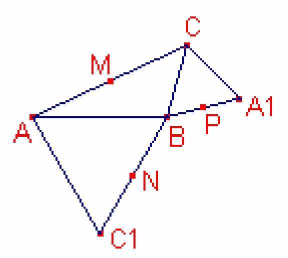
$$\overline{PN}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{BP}^2 - 2\overline{BN}\cdot\overline{BP}\cdot\cos(B + 120^o) =$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{c}{2}(\cos B\cos 120^o - \sin B\sin 120^o) =$$

$$= \frac{a^2+c^2}{4} - \frac{ac}{4}\left(\cos B + \sqrt{3}\sin B\right) = \frac{a^2+c^2}{4} - \frac{ac}{4}\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac} + \sqrt{3}\sin B\right) =$$

$$= \frac{3a^2+3c^2-b^2}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}ac\sin B$$

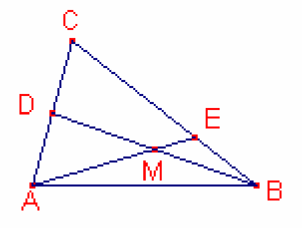
Aleshores, $\overline{MN} = \overline{PN}$.
Anàlogament provaríem que $\overline{MP} = \overline{PN}$.



En cas que $B > 60^o$ la demostració seria semblant.

Problema 53

Demostreu que la recta que passa pel vèrtex A del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el punt mig de la mitjana $\overline{BD}$ divideix el costat $\overline{BC}$ en la raó 1:2 comptant a partir de B.



Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades cartesianes:

$A(0,0), B(b,0), C(c,d)$. Aleshores, $D\left(\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right)$.

Siga M el punt mig de la mitjana $\overline{BD}$, aleshores, $M\left(\frac{2b+c}{4},\frac{d}{4}\right)$.

Siga E el punt de la recta AM que està en el segment $\overline{BC}$.
Tenim les següents igualtats vectorials:

$\overrightarrow{CE}=k\cdot\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+r\cdot\overrightarrow{AM}$

Igualant:

$k\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+r\cdot\overrightarrow{AM}$. Determinem k i r:

$k(b-c,-d)=(-c,-d)+r\left(\frac{2b+c}{4},\frac{d}{4}\right)$. Igualant les components dels vectors:

$\begin{cases} k(b-c)=-c+r\frac{2b+c}{4} \\ -dk=-d+r\frac{d}{4} \end{cases}$ resolent en les incògnites k, r, $\begin{cases} k=\frac{2}{3} \\ r=\frac{4}{3} \end{cases}$.

Aleshores E divideix el costat $\overline{BC}$ en la raó 1:2 comptant a partir de B.

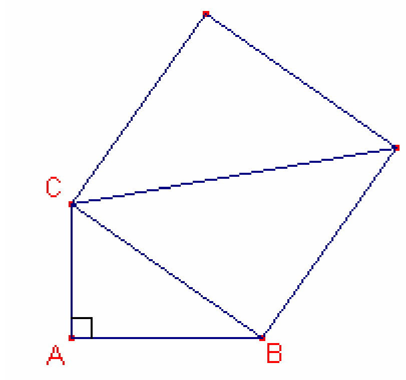
Problema 54

Demostreu que la suma dels catets d’un triangle rectangle és igual o menor que la diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{\circ}$.

La diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa és (aplicant el teorema de Pitàgores) $\sqrt{2}a$.



$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc.$$

Provem que $2bc < a^2$

Considerem la funció: $f(b,c) = 2bc$

Com que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$f(b) = 2b\sqrt{a^2 - b^2}$. Determinem el màxim de la funció.

$$f'(b) = \frac{(2a^2b - 4b^3)}{\sqrt{a^2b^2 - b^4}} = \frac{2(a^2 - 2b^2)}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$f'(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$f''(b) = \frac{-2b^3}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}.$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0.$$

Per tant, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ és un màxim de la funció $f(b)$.

Aleshores, $f(b) \le f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} = a^2$.

Per tant, $2bc < a^2$.

$(b+c)^2 = a^2 + 2bc \le a^2 + a^2 = 2a^2$.

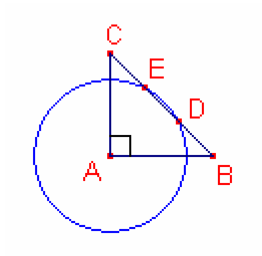
Calculant l’arrel quadrada:

$b + c \le \sqrt{2}a$. Aleshores, la suma dels catets d’un triangle rectangle és igual o menor que la diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa.

Problema 55
Una circumferència de radi R té per centre el vèrtex d'un angle recte d'un triangle rectangle isòsceles. Sabent que la circumferència determina sobre la hipotenusa del triangle tres segments iguals, determineu l'àrea del triangle.

Solució:

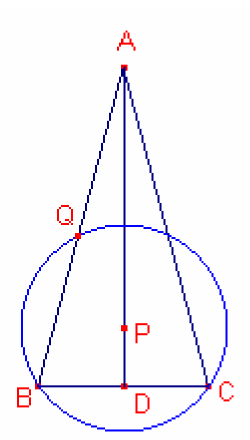
Considerem el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{\circ}$
Siguen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$.
Considerem la circumferència de centre A i radi R, tal que la circumferència talla la hipotenusa $\overline{BC}$ en els punts D, E i $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC} = \frac{a}{3}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$a^2 = 2b^2$ (1)
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$R^2 = b^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2b\frac{a}{3}\cos 45^{\circ}$. Simplificant:
$R^2 = b^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{\sqrt{2}}{3}ab$ (2). Substituint (1) en l'expressió (2):
$R^2 = b^2 + \frac{2b^2}{9} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{2b^2}b$, resolent l'equació, $b^2 = \frac{9}{5}R^2$.
Aleshores, $S_{ABC} = \frac{b^2}{2} = \frac{9}{10}R^2$.

Problema 56
En un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAC = 30^{\circ}$, escollim un punt P en la mitjana $\overline{AD}$ i un punt Q en el costat $\overline{AB}$ (Q distint de B) tal que $\overline{PC} = \overline{PQ}$.
Determineu l'angle $\angle PQC$.

Solució:

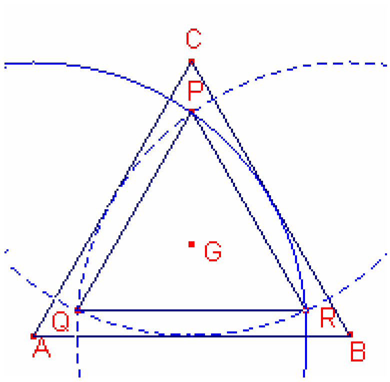


$\angle ABC = \frac{180^{\circ} - 30^{\circ}}{2} = 75^{\circ}$
Considerem la circumferència de centre P que passa per B.
Aquesta circumferència talla el costat $\overline{AB}$ en un punt Q tal que $\overline{PC} = \overline{PQ}$.
L'angle $\angle QPC$ és central de la circumferència i abraça un arc de $2 \cdot 75^{\circ} = 150^{\circ}$.
El triangle $\overset{\Delta}{QPC}$ és isòsceles, aleshores,
$\angle PQC = \frac{180^{\circ} - 150^{\circ}}{2} = 15^{\circ}$.

Problema 57

En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a dibuixem les circumferències que tenen els seus centres en els vèrtexs i són tangents als costats oposats.
Els 3 punts d'intersecció d'aquestes circumferències interiors al triangle formen un triangle equilàter.
Determineu el costat d'aquest triangle.

Solució:



Considerem el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a amb les següents coordenades cartesianes:

$$A(0,0),\ B(a,0),\ C\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

El baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $G\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ determinat pels 3 punts d'intersecció de les circumferències que tenen centres en els tres vèrtex i són tangents als costats oposats (veure figura).
Siga la circumferència de centre A, tangent al costat a que té per equació:

$$C \equiv x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2.$$

El punt P és la intersecció de la circumferència C i la recta $x = \frac{1}{2}a$.

Aleshores, $P\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQR}$ són homotètics i el baricentre és el centre d'homotècia.
Siga $x = \overline{PQ}$
Per ser els triangles homotètics és té la següent proporcionalitat:

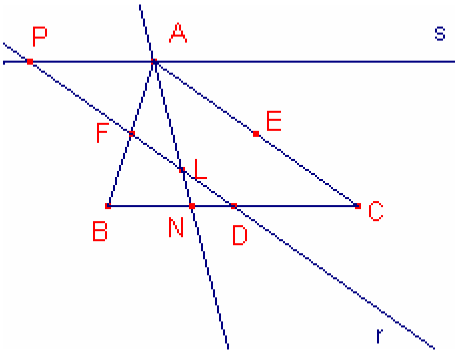
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GP}}{\overline{GC}}.$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a}{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2}\right)$$

Aleshores, $x = \left(\frac{-1+\sqrt{6}}{2}\right)a$.

Problema 58

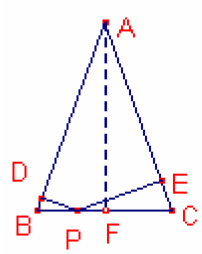
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga L el punt mig de la mitjana al vèrtex B.
La recta que passa pels punts A, L talla el costat $\overline{BC}$ en el punt N.
Proveu que $\overline{AN} = 4 \cdot \overline{LN}$.



Solució:
Siguen D, E, F els punts mig dels costats a, b, c del triangle, respectivament.
Considerem la recta r que passa pels punts F, D, paral·lela mitjana al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores, L pertany al segment $\overline{FD}$ i a més a més, $\overline{FL} = \overline{LD}$.
Considerem la recta s que passa pel punt A i és paral·lela al costat $\overline{BC}$.
Les rectes r i s es tallen en el punt P.
Els triangles $\overset{\Delta}{FBD}$, $\overset{\Delta}{FAP}$ són iguals, aleshores,
$\overline{PF} = 2 \cdot \overline{FL}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{LND}$, $\overset{\Delta}{LAP}$ són semblants, aleshores,
$3 = \dfrac{\overline{FL}}{\overline{LD}} = \dfrac{\overline{AL}}{\overline{LN}}$, per tant, $\overline{AL} = 3 \cdot \overline{LN}$.
Aleshores, $\overline{AN} = 4 \cdot \overline{LN}$.

Problema 59
Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt qualsevol de la base d'un triangle isòsceles als dos costats iguals és constant.

Solució:



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Siga P un punt qualsevol del costat $\overline{BC}$.
Siguen $h_1 = \overline{PD}, h_2 = \overline{PE}$ les distàncies de P als costats iguals del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $h = \overline{AF}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre el costat desigual.
L'àrea de $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S = \dfrac{ah}{2}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\overset{\Delta}{AFB}$, $h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$. Per tant, $S = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{a\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{2}$.

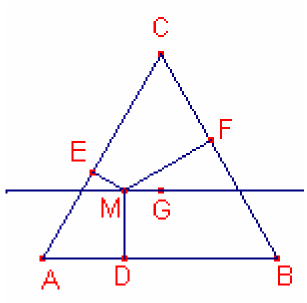
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és suma de les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{APC}$,

$$S = S_{ABP} + S_{APC} = \frac{b \cdot h_1}{2} + \frac{b \cdot h_2}{2} = \frac{b(h_1 + h_2)}{2}.$$

Igualant les àrees: $h_1 + h_2 = \dfrac{a\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{b}$. Per tant, $h_1 + h_2$ és constat.

Problema 60

En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ tracem una recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa pel baricentre G del triangle. Siga un punt M de la recta i interior al triangle.
Tracem les perpendiculars $\overline{MD},\overline{ME},\overline{MF}$ al costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ del triangle.
Proveu que $\overline{MD}=\frac{1}{2}\left(\overline{ME}+\overline{MF}\right)$.



Solució:
Siga $a=\overline{AB}$ el costat del triangle. Pel teorema de Pitàgores l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Per la propietat del baricentre la distància entre la recta i el costat $\overline{AB}$ és: $\overline{MD}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$. Aïllant a, $a=\frac{6}{\sqrt{3}}\overline{MD}$ (1)

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{ACM}$, $\overset{\Delta}{BCM}$.
Per tant: $S_{ABC}=\frac{a\overline{MD}}{2}+\frac{a\overline{ME}}{2}+\frac{a\overline{MF}}{2}$.

Igualant les àrees i simplificant: $\overline{MD}+\overline{ME}+\overline{MF}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (2)

Substituint l'expressió (1) en (2):

$\overline{MD}+\overline{ME}+\overline{MF}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{6}{\sqrt{3}}\overline{MD}$. Aleshores, $\overline{MD}=\frac{1}{2}\left(\overline{ME}+\overline{MF}\right)$.