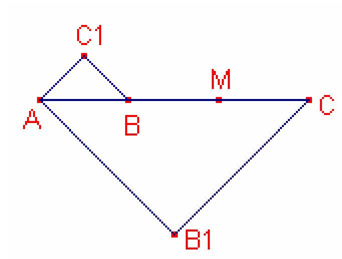
Problema 61

En els segmentes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ d'una recta construïm triangles rectangles i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC_1}$, $\overset{\Delta}{ACB_1}$ $\angle AC_1B = 90º$, $\angle AB_1C = 90º$ i orientats en sentit contrari.
Demostreu que el punt mig del segment $\overline{BC}$ i els punts B_1, C_1 són els vèrtexs d'un triangle rectangle i isòsceles.

Solució:
Considerem els punts A, B, C amb les següents coordenades cartesianes:
$A(0,0), B(b,0), C(c,0)$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$. Aleshores, $M\left(\frac{b+c}{2},0\right)$.



Les coordenades de B_1, C_1 són: $B_1\left(\frac{c}{2},\frac{-c}{2}\right) C_1\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right)$.

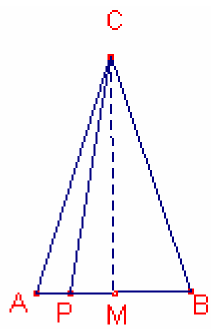
$\overrightarrow{MC_1} = \left(\frac{-c}{2},\frac{b}{2}\right)$, $\overrightarrow{MB_1} = \left(\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$

$\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MC_1} = 0$, $\left\|\overrightarrow{MB_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC_1}\right\| = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$.

Aleshores, Els punts M, B_1, C_1 són són els vèrtexs d'un triangle rectangle i isòsceles.

Problema 62

En la base $\overline{AB}$ d'un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ agafem un punt P.
Proveu que $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AP} \cdot \overline{BP}$.
Què passa si P està en la continuació de la base?.



Solució:

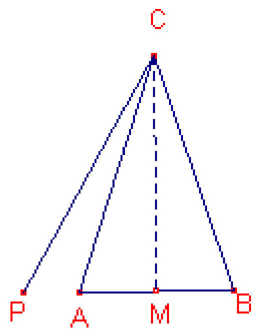
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga $\alpha = \angle CAB$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cdot \cos\alpha =$$
$$= \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \overline{AC}^2 + \overline{AP}\left(\overline{AP} - 2 \cdot \overline{AM}\right) =$$
$$= \overline{AC}^2 - \overline{AP} \cdot \overline{BP}.$$

Si P està en la continuació del costat $\overline{AB}$:

$$\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cdot \cos(180º - \alpha) =$$
$$= \overline{AC}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{BP}$$

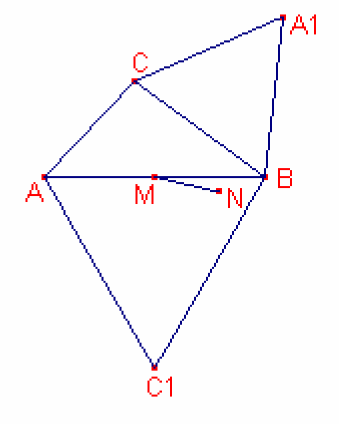


Problema 63

En els costats $\overline{AB}, \overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i fora d'ell es construeixen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC_1}$, $\overset{\Delta}{BCA_1}$.

Proveu que el segment que uneix els punts migs dels segments $\overline{AB}$, $\overline{A_1C_1}$ és igual a la meitat del segment $\overline{AC}$ i forma amb ell un angle de 60º.

Solució:



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades cartesianes:
$A(0,0), B(b,0), C(a,c)$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$, aleshores, $M\left(\frac{b}{2},0\right)$.

Aplicant girs les coordenades dels punts A_1, C_1 són:

$$A_1\left(\frac{a+b+c\sqrt{3}}{2},\frac{(b-a)\sqrt{3}+c}{2}\right),\quad C_1\left(\frac{b}{2},\frac{-b\sqrt{3}}{2}\right).$$

Siga N el punt mig del segment $\overline{A_1C_1}$. Les seues coordenades són:

$$N\left(\frac{a+2b+c\sqrt{3}}{4},\frac{-a\sqrt{3}+c}{4}\right)$$

$$\vec{MN}=\left(\frac{a+c\sqrt{3}}{4},\frac{c-a\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(a+c\sqrt{3},c-a\sqrt{3}\right)$$

$\vec{AC}=(a,c)$, $\left\|\vec{AC}\right\|=\sqrt{a^2+c^2}$.

$$\left\|\vec{MN}\right\|=\frac{1}{4}\sqrt{\left(a+c\sqrt{3}\right)^2+\left(c-a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}=\frac{1}{2}\left\|\vec{AC}\right\|$$

Siga α l'angle que formen $\vec{MN}, \vec{AC}$.

Calculem l'angle que formen $\vec{MN}, \vec{AC}$ utilitzant el producte escalar:

$$\vec{MN}\cdot\vec{AC}=\frac{1}{4}\left(a+c\sqrt{3},c-a\sqrt{3}\right)\cdot(a,c)=\frac{1}{4}\left(a^2+c^2\right)=\frac{1}{4}\left\|\vec{AC}\right\|^2$$

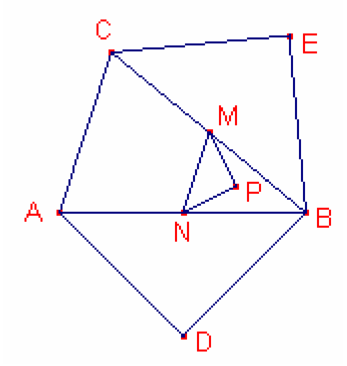
$$\vec{MN}\cdot\vec{AC}=\left\|\vec{MN}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\left\|\vec{AC}\right\|^2\cos\alpha$$

Igualant els productes escalars:

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$, aleshores, $\alpha=60^{\circ}$.

Problema 64

Sobre els costats $\overline{AB}, \overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i fora d'ell es construeixen els triangles rectangles i isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{BCE}$, $\angle D = \angle E = 90º$.
Proveu que els punts mig dels segments $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{DE}$ són els vèrtexs d'un triangle rectangle i isòsceles.



Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades cartesianes:
$A(0,0), B(b,0), C(a,c)$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$, aleshores, $M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Siga N el punt mig del segment $\overline{AB}$, aleshores, $N\left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

Aplicant girs les coordenades dels punts D, E són:
$D\left(\frac{-b}{2}, \frac{-b}{2}\right)$, $E\left(\frac{a+b+c}{2}, \frac{-a+b+c}{2}\right)$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{DE}$, les seues coordenades són:
$P\left(\frac{a+2b+c}{4}, \frac{-a+c}{4}\right)$.

Calculem les components dels vectors $\vec{PM}, \vec{PN}$:

$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4}(a-c, a+c)$, $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{4}(-a-c, a-c)$.

$\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = \frac{1}{4}\sqrt{(a-c)^2 + (a+c)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2 + 2c^2}$.

$\left\|\overrightarrow{PN}\right\| = \frac{1}{4}\sqrt{(-a-c)^2 + (a-c)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2 + 2c^2}$.

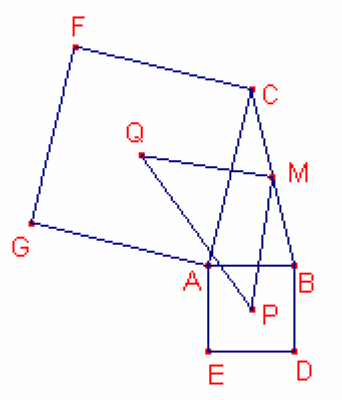
Aleshores, $\overline{PM} = \overline{PN}$.

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 (a-c, a+c)(-a-c, a-c) = 0$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MPN}$ és isòsceles i rectangle $\angle MPN = 90º$.

Problema 65

Sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ ($\overline{AC}=\overline{BC}$) i fora d'ell es construeixen quadrats. Proveu que els centres d'aquests quadrats i el punt mig del costat $\overline{BC}$ són els vèrtexs d'un triangle isòsceles rectangle.



Solució:

Considerem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les següents coordenades cartesianes:
$A(-a,0),\ B(a,0),\ C(0,b)$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$, aleshores, $M\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

Considerem els quadrats ABDE, ACFG.
Aplicant girs les coordenades dels punts E, G són:
$E(-a,-2a)$, $G(-a-b,a)$.

El punt P centre del quadrat ABDE és el punt mig del segment $\overline{BE}$. Aleshores, les seues coordenades són:
$P(0,-a)$.

El punt Q centre del quadrat ACFG és el punt mig del segment $\overline{CG}$. Aleshores, les seues coordenades són:
$Q\left(\frac{-a-b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$.

Calculem les components dels vectors $\vec{MP},\vec{MQ}$:

$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{4}(-a,-2a-b)$, $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}(-2a-b,a)$.

$\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2a-b)^2+a^2}=\frac{1}{4}\sqrt{5a^2+b^2+4ab}$.

$\left\|\overrightarrow{MP}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(-2a-b)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{5a^2+b^2+4ab}$.

Aleshores, $\overline{MP}=\overline{MQ}$.

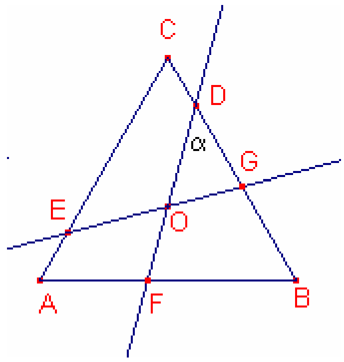
$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(-a,-2a-b)(-2a-b,a)=0$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PMQ}$ és isòsceles i rectangle $\angle PMQ=90^o$.

Problema 66

Pel centre O d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ s'han traçat dues rectes que formen entre elles 60º.
Demostreu que els segments d'aquestes rectes situats en el triangle són iguals.

Solució 1:



Considerem la recta r, que talla el triangle en els punts D, F.
Considerem la recta s que talla el triangle en els punts E, G.
Siga $\angle DOG = 60^o$ (angle que formen les rectes r, s).
Considerem l'angle $\alpha = \angle FDB$. Aleshores, $\angle OGD = 120^o - \alpha$
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CEG}$. Aleshores, $\angle CEG = \alpha$.
Els triangles $\overset{\Delta}{CEO}, \overset{\Delta}{BOD}$ són iguals que tenen un costat igual $\overline{CO} = \overline{BO}$ i els dos angles contigus iguals $\angle ECO = \angle OBD = 30^o$, $\angle COE = \angle BOD = 150 - \alpha$
Aleshores $\overline{OD} = \overline{OE}$.
Anàlogament demostraríem que $\overline{OG} = \overline{OF}$.
Per tant, $\overline{DF} = \overline{EG}$.

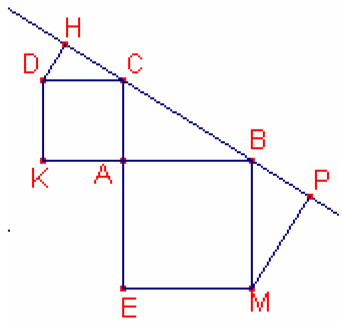
Solució 2:

El gir de centre O i angle 120º deixa invariant el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Per tant el gir de centre O i 120º transforma el punt D en E, per tant $\overline{OD} = \overline{OE}$
El gir de centre O i 120º transforma el punt F en G, per tant $\overline{OG} = \overline{OF}$.
Aleshores, $\overline{DF} = \overline{EG}$.

Problema 67

En els catets $\overline{AB}, \overline{AC}$ d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ rectangle $A = 90^o$ s'han construït (fora del triangle) dos quadrats AEMB, AKDC. Des dels punts D i M es dibuixen les perpendiculars $\overline{DH}$, $\overline{MP}$ sobre la continuació de la hipotenusa $\overline{BC}$.
Proveu que $\overline{DH} + \overline{MP} = \overline{BC}$.

Solució:



$\angle PBM = \hat{C}$, $\angle DCH = \hat{B}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CHD}, \overset{\Delta}{BAC}$ són semblants, aleshores:

$\frac{\overline{DH}}{b} = \frac{b}{a}$, per tant: $\overline{DH} = \frac{b^2}{a}$ (1)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BPM}, \overset{\Delta}{BAC}$ són semblants, aleshores:

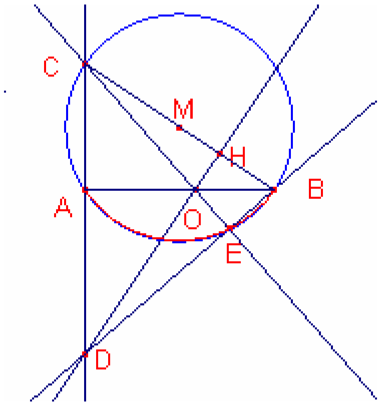
$\frac{\overline{MP}}{c} = \frac{c}{a}$, per tant, $\overline{MP} = \frac{c^2}{a}$ (2)

Sumant les expressions (1), (2):

$$\overline{DH} + \overline{MP} = \frac{b^2 + c^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a = \overline{BC}.$$

Problema 68

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ rectangle $A = 90^{\circ}$.
Pel punt O del catet $\overline{AB}$ tracem la perpendicular $\overline{OH}$ a la hipotenusa $\overline{BC}$.
Siga D la intersecció de la recta OH i la recta AC.
Siga E la intersecció de les rectes DB i OC.
Determineu el lloc geomètric del punt E al variar O sobre el catet $\overline{AB}$.



Solució:
Siga $\alpha = \angle AOC$, $\beta = \angle OCB$, $\gamma = \angle HDB$.
Demostrem que $\beta = \gamma$.

Considerem el rectangle $\overset{\Delta}{OHC}$, $tg\beta = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{CH}}$

Considerem el rectangle $\overset{\Delta}{DHB}$, $tg\gamma = \dfrac{\overline{HB}}{\overline{DH}}$

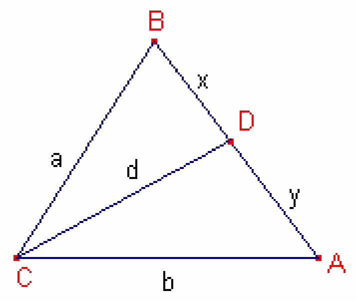
$$\frac{tg\beta}{tg\gamma} = \frac{\dfrac{\overline{OH}}{\overline{CH}}}{\dfrac{\overline{HB}}{\overline{DH}}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{DH}}{\overline{CH}} = tgB \cdot ctgB = 1$$

Aleshores, $tg\beta = tg\gamma$, per tant, $\beta = \gamma$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CEB}$, $\overset{\Delta}{DBH}$ són semblants, per tant $\overset{\Delta}{CEB}$ és rectangle.
Siga M el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$.
Per la propietat de la mitjana d'un triangle rectangle (la mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa):
$\overline{ME} = \overline{MB}$, el segment $\overline{ME}$ és sempre constat.
Aleshores el lloc geomètric del punt E al variar O sobre el catet $\overline{AB}$ és l'arc de circumferència de centre M i radi $\dfrac{\overline{AB}}{2}$.

Problema 69

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si coneguem els costats a, b i la bisectriu d que formen els dos costats.



Solució:

Siga $d=\overline{CD}$ la bisectriu a l'angle C.

Siga $x=\overline{BD}$, $y=\overline{AD}$.

Siga $2\alpha=\hat{C}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és: $S_{ACD}=\dfrac{db\cdot\sin\alpha}{2}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és: $S_{BCD}=\dfrac{da\cdot\sin\alpha}{2}$

Sumant les dues àrees:

$$S_{ABC}=\frac{d\cdot(a+b)}{2}\sin\alpha \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$: $\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{d}{\sin B}$ (2)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$: $\dfrac{y}{\sin\alpha}=\dfrac{d}{\sin A}$ (3)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\dfrac{x+y}{\sin 2\alpha}=\dfrac{b}{\sin B}$ (4)

Substituint (2) i (3) en l'expressió (4):

$$\frac{d\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin B}+\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}\right)}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{\sin B}$$

Simplificant:

$$\frac{d(\sin A+\sin B)}{2\sin A\cos\alpha}=b \qquad (5)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}$ (6)

Substituint l'expressió (6) en l'expressió (5):

$$\frac{d\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}{2\cos\alpha}=b$$

Aleshores, $\cos\alpha=\dfrac{d(a+b)}{2ab}$ $\quad\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{d(a+b)}{2ab}\right)^2}$ (7).

Substituint l'expressió (7) en l'expressió (1):

$$S_{ABC}=\frac{d\cdot(a+b)}{2}\sin\alpha=\frac{d(a+b)\sqrt{4a^2b^2-d^2(a+b)^2}}{4ab}$$

Problema 70

En el costat $\overline{AC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ agafem el punt M tal que $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ i en la continuació del costat $\overline{BC}$ un punt N tal que $\overline{BN} = \overline{CB}$. En quina raó divideix cadascun dels segments $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$ el punt d'intersecció.

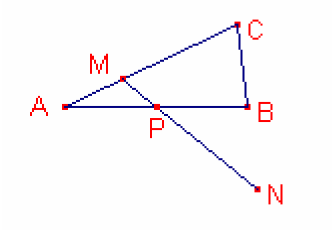
Solució:

Siga P el punt d'intersecció dels segments $\overline{AB}$ i $\overline{MN}$.

Els vectors $\left\{\vec{AB}, \vec{MN}\right\}$ són linealment independents, per tant base del plànol real.

Siga $\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, $\quad \vec{MP} = \beta \cdot \vec{MN}$.

Hem de determinar α, β.



$\vec{AC} = 3 \cdot \vec{AM} = 3\left(\vec{AP} - \vec{MP}\right) = 3\alpha\vec{AB} - 3\beta\vec{MN}$.

$\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = (1-3\alpha)\vec{AB} + 3\beta\vec{MN}$

$\vec{PN} = \vec{MN} - \vec{MP} = (1-\beta)\vec{MN}$

$\vec{AN} = \vec{AP} + \vec{PN} = \alpha\vec{AB} + (1-\beta)\vec{MN}$

$\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = \vec{AB} + \vec{CB} = (2-3\alpha)\vec{AB} + 3\beta\vec{MN}$

Com que les components d'un vector respecte d'una base són úniques:

$\begin{cases} \alpha = 2 - 3\alpha \\ 1 - \beta = 3\beta \end{cases}$ resolent el sistema, $\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Aleshores, P divideix el segment $\overline{AB}$ en la raó 1:2.

P divideix el segment $\overline{MN}$ en la raó 1:4.