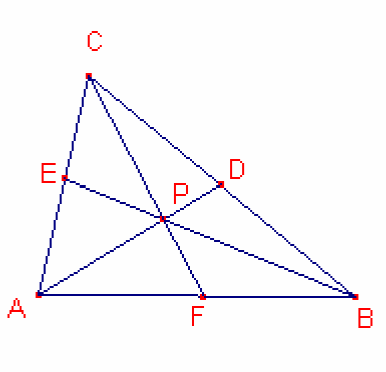
Problemes de Triangles del 71 al 80

Problema 71

Siguen les cevianes $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ amb un punt comú P interior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Proveu que $\dfrac{\overline{DP}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{EP}}{\overline{BE}}+\dfrac{\overline{FP}}{\overline{CF}}=1$.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Notació: $[ABC]=$ àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{AD}}=\frac{[CPD]}{[CAD]}=\frac{[BPD]}{[ADB]}=\frac{[CPD]+[BPD]}{[CAD]+[ADB]}=\frac{[CPD]+[BPD]}{[ABC]}$$

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{BE}}=\frac{[EPC]}{[ECB]}=\frac{[EPA]}{[EAB]}=\frac{[EPC]+[EPA]}{[ABC]}$$

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{CF}}=\frac{[FPB]}{[CFB]}=\frac{[FPA]}{[AFC]}=\frac{[FPB]+[FAP]}{[ABC]}$$

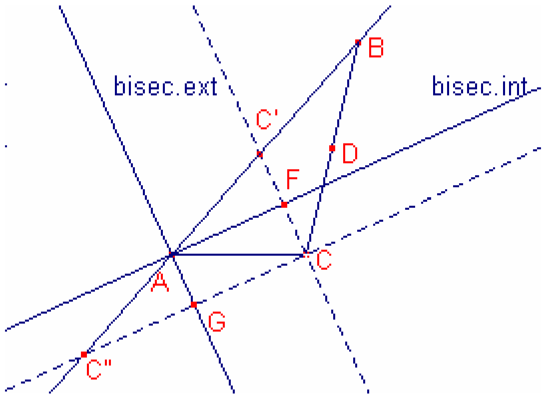
Sumant les tres expressions:

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{EP}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{FP}}{\overline{CF}}=\frac{[CPD]+[BPD]}{[ABC]}+\frac{[EPC]+[EPA]}{[ABC]}+\frac{[FPB]+[FPA]}{[ABC]}=\frac{[ABC]}{[ABC]}=1$$

Problema 72

El costat $\overline{AB}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és major que $\overline{AC}$ i D el punt mig de $\overline{BC}$.
Des de C dibuixem dues perpendiculars a les bisectrius interior i exterior de l'angle A tallant aquelles en F i G, respectivament.
Proveu que:

$$\overline{DF}=\frac{\overline{AB}-\overline{AC}}{2}\qquad \overline{DG}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$$



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{AFC}, \overset{\Delta}{AFC'}$ són iguals, per tant,

$\overline{AC}=\overline{AC'}$, $\overline{FC}=\overline{FC'}$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CC'B}$.

$\overline{FC}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{CC'B}$.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{FD}=\overline{C'B}=\frac{\overline{AB}-\overline{AC'}}{2}=\frac{\overline{AB}-\overline{AC}}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AGC}, \overset{\Delta}{AGC''}$ són iguals, per tant,

$\overline{CG}=\overline{GC''}$, $\overline{AC}=\overline{AC''}$

$\overline{GC}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{CC''B}$. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{GD}=\overline{C''B}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC''}}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$$

Problema 73

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i siguen T, T' els punts de tangència de les circumferències inscrita i exinscrita amb el costat $\overline{BC}$.

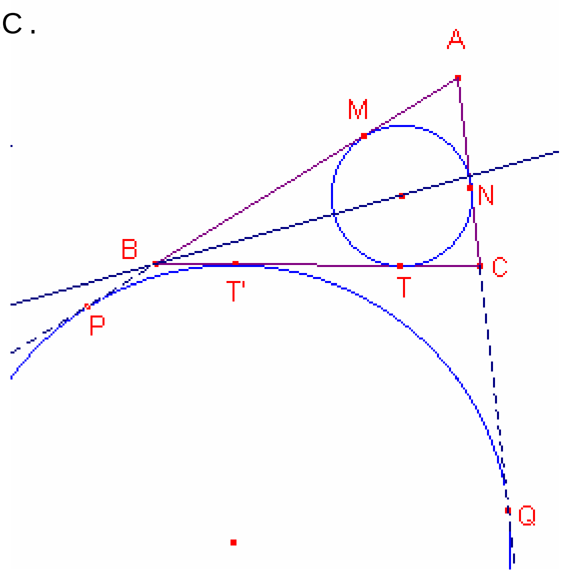
Proveu que $\overline{TT'} = |c - b|$

Solució:

Siguen T, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle.

Siguen T', P, Q els punts de tangència de la circumferència exinscrita i el triangle.

Siga $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Notem que $\overline{BT} = \overline{BM}$, $\overline{AN} = \overline{AM}$.

$\overline{BT} + \overline{CN} + \overline{AN} = p$

$\overline{CN} + \overline{AN} = b$

Restant les dues expressions:

$\overline{BT} = p - b$

Notem que $\overline{AQ} = \overline{AP}$, $\overline{CQ} = \overline{CT'}$.

$\overline{AC} + \overline{CT'} = \overline{AB} + \overline{BP}$

$\overline{AB} + \overline{BT'} = \overline{AB} + \overline{BP}$

Sumant les dues expressions:

$\overline{AC} + \overline{CT'} + \overline{AB} + \overline{BT'} = 2 \cdot \left(\overline{AB} + \overline{BP}\right)$

$2p = 2c + 2 \cdot \overline{BP}$

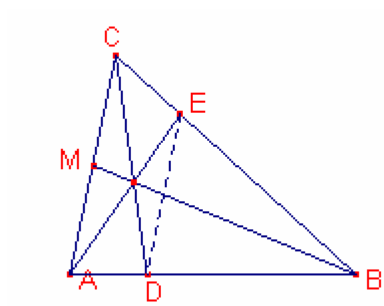
$\overline{BP} = p - c$

$$\overline{TT'} = \left|\overline{BT} - \overline{BT'}\right| = \left|\overline{BT} - \overline{BT'}\right| = |p - b - (p - c)| = |c - b|$$

Problema 74

La recta $\overline{DE}$ és paral·lela al costat $\overline{AC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, tal que D pertany al costat $\overline{AB}$ i E al costat $\overline{BC}$. Demostreu que $\overline{AE}, \overline{CD}$ i la mitjana $\overline{BM}$ es tallen en un punt.

Solució:



Els triangles $\overset{\Delta}{CBE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ estan en posició de Tales. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BE}}$, aleshores, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = 1$ (1)

M és el punt mig del costat $\overline{AC}$, aleshores, $\overline{CM} = \overline{AM}$, per tant,

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1$ (2)

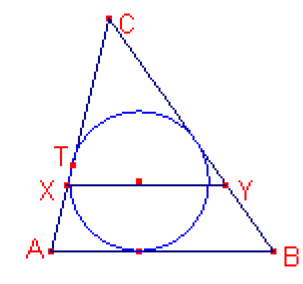
Multiplicant les expressions (1), (2):

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1$, aleshores, les cevianes $\overline{AE}, \overline{BM}, \overline{CD}$ compleixen les hipòtesis del teorema de Ceva, aleshores les tres cevianes s'intersecten en un punt.

Problema 75

Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ traceu una paral·lela al costat $\overline{AB}$ tal que dividesca el perímetre per la meitat.

Solució:
Suposem resolt el problema.



Siga $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{AX}=x, \overline{BY}=y$.

$x+y+c=p$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CXY}$, són semblants, aleshores,

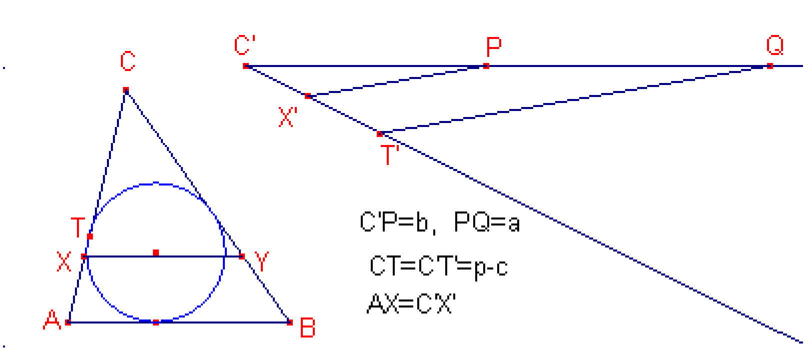
$\dfrac{b}{x}=\dfrac{a}{y}=\dfrac{a+b}{x+y}$, aleshores, $\dfrac{b}{x}=\dfrac{a+b}{p-c}$.

Per tant, $x=\dfrac{b(p-c)}{a+b}$

Podem fer la construcció geomètrica utilitzant el teorema de Tales.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle i el costat $\overline{AC}$.

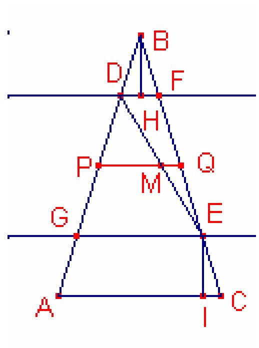
Aleshores, $\overline{CT}=p-c$



Problema 76

Siga un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Siga D un punt del costat $\overline{AB}$ i siga E un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = \overline{CE}$. Proveu que el lloc geomètric dels punts mig dels segments $\overline{DE}$ al variar D és la paral·lela mitja del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

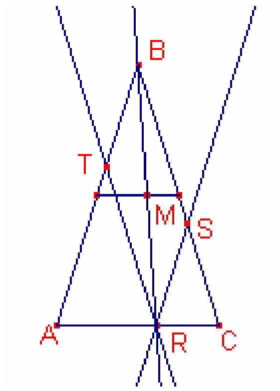
Solució:



Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$. Siga $x = \overline{BD} = \overline{CE}$
Construïm els segments $\overline{DF}$, $\overline{GE}$ paral·lels al costat $\overline{AC}$.
Siga H del segment $\overline{DF}$ tal que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{DF}$.
Siga I del segment $\overline{AC}$ tal que $\overline{EI}$ és perpendicular a $\overline{AC}$.

Aleshores, $\overline{BH} = \overline{EI}$ (per ser els triangles $\overset{\Delta}{BHF}$, $\overset{\Delta}{EIC}$ iguals).
Considerem el trapezi isòsceles DGEF.
M pertany a la paral·lela mitjana del trapezi DGEF.

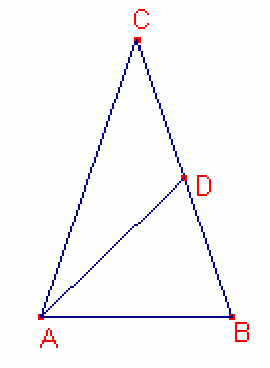
Aleshores M pertany a la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Si M pertany a la paral·lela mitjana
Siga la recta que passa pels punts B, M que talla $\overline{AC}$ en el punt R.
Aleshores, $\overline{BM} = \overline{MR}$.
Siga la recta que passa per R i és paral·lela al segment $\overline{AB}$ que talla $\overline{BC}$ en el punt S.
Siga la recta que passa per R i és paral·lela al segment $\overline{BC}$ que talla $\overline{AB}$ en el punt T.
Considerem el paral·lelogram BTRS tal que M és el punt mig de la diagonal $\overline{BR}$. Aleshores, $\overline{TM} = \overline{SM}$.

Problema 77
De tots els triangles isòsceles amb mitjana sobre el costat lateral constant determineu el de major àrea. Determineu, també, la mesura de l'angle desigual del triangle.

Solució:



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AC} = \overline{BC} = a$.
Siga $m = \overline{AD}$ mitjana del triangle.
Per la fórmula de la mitjana del triangle en funció dels costats:

$$m^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{2c^2 + a^2}{4}.$$

$$a^2 = 4m^2 - 2c^2 \qquad (1)$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$A = \frac{c \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{2} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en (2):

$$A(c) = \frac{\sqrt{16m^2c^2 - 9c^4}}{4}$$

Maximitzem la funció àrea:

$$A'(c) = \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{16m^2c^2 - 9c^4}}(32m^{2c} - 36c^3)$$

Resolem l'equació $A'(c) = 0$.

Les solucions són $c = 0$, $c = \frac{\sqrt{8}}{3}m$, $c = -\frac{\sqrt{8}}{3}m$

$c = \frac{\sqrt{8}}{3}m$ és el màxim de la funció àrea.

Els costats del triangle d'àrea màxima són: $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{3}m$, $\overline{AB} = \frac{\sqrt{8}}{3}m$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ calculem l'angle desigual C.

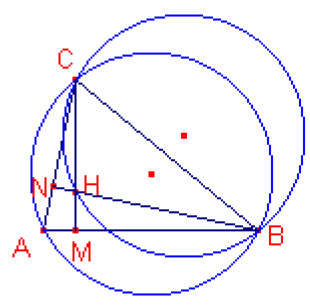
$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - a^2}{-2a^2} = \frac{\frac{8}{9}m^2 - 2\frac{20}{9}m^2}{-2\frac{20}{9}m^2} = \frac{4}{5}.$$

Aleshores, $C = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

Problema 78

Demostreu que la circumferència circumscrita a un triangle té el mateix radi que la circumferència que passa per dos dels seus vèrtexs i per l'ortocentre.

Solució:



Siga H l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen $\overline{CM}$, $\overline{BN}$ altures del triangle.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BHC}$.
Notem que $\angle NBC = 90º - C$, $\angle BNC = 90º - B$.
Aleshores, $\angle BHC = 180º - (90º - C + 90º - B) = B + C = 180º - A$.

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga S el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{BHC}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ (1)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BHC}$:

$$\frac{a}{\sin \angle BHC} = \frac{a}{\sin 180º - A} = \frac{a}{\sin A} = 2S \qquad (2)$$

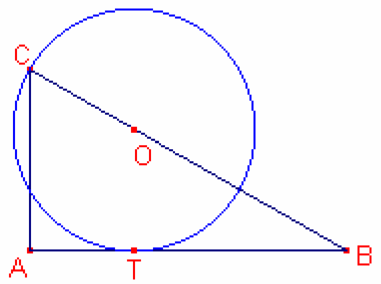
Igualant les expressions (1), (2):

$R = S$, és a dir, la circumferència circumscrita a un triangle té el mateix radi que la circumferència que passa per dos dels seus vèrtexs i per l'ortocentre.

Problema 79

Una circumferència passa pel vèrtex C d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, és tangent al catet $\overline{AB}$ i té el centre en la hipotenusa $\overline{BC}$. Determineu el seu radi si $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$.

Solució:

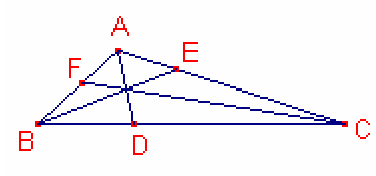


Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90º$.
Siga O el centre de la circumferència, R el seu radi i T el punt de tangència.
Aleshores, $\overline{OT} = R$ i perpendicular al costat $\overline{AB}$, per ser la circumferència tangent al costat $\overline{AB}$.
$\overline{OC} = R$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{TBO}$ són semblants, aleshores: $\dfrac{b}{R} = \dfrac{a}{a - R}$, aleshores, $R = \dfrac{ab}{a + b}$.

Problema 80

Demostreu que si en un triangle un angle és de 120º els peus de les bisectrius del triangle formen un triangle rectangle.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 120^o$.

Siguen $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ bisectrius del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siguen $\alpha = \angle BDF$, $\beta = \angle EDC$.

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ (1)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDF}$: $\frac{\overline{FD}}{\sin B} = \frac{\overline{BF}}{\sin\alpha}$ (2)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AFD}$: $\frac{\overline{FD}}{\sin 60^o} = \frac{\overline{FA}}{\sin(180^o - 60^o - B - \alpha)}$ (3)

Dividint les expressions (2), (3):

$$\frac{\sin 60^o}{\sin B} = \frac{\sin(B + 60^o - \alpha)}{\sin\alpha} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FA}} \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (4):

$$\frac{\sin 60^o}{\sin B} = \frac{\sin(B + 60^o - \alpha)}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin 120^o}{\sin B}.$$

Simplificant,

$\sin\alpha = \sin(B + 60^o - \alpha)$.

Aleshores, $\alpha = B + 60^o - \alpha$, per tant, $\alpha = 30^o + \frac{B}{2}$.

Anàlogament, $\beta = 30^o + \frac{C}{2}$.

$$\angle FDE = 180^o - (\alpha + \beta) = 180^o - \left(30^o + \frac{B}{2} + 30^o + \frac{C}{2}\right) = 120^o - \frac{B + C}{2} = 120^o - \frac{180^o - A}{2} = 90^o.$$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és rectangle.