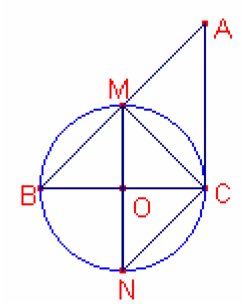
Problema 81

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$ passa pel punt mig M del costat $\overline{AB}$, i el costat $\overline{AC}$ és tangent a dita circumferència. Siga N el punt diametralment oposat a M respecte de la circumferència. Proveu que la raó entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{MNC}$ és 2.



Solució:

Per ser $\overline{AC}$ tangent a la circumferència, $\overline{AC}$ és perpendicular al diàmetre $\overline{BC}$, aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $C = 90^o$.
La mitjana sobre d'un triangle rectangle és la meitat de la hipotenusa, aleshores:

$\overline{CM} = \overline{BM} = \frac{c}{2} = \overline{CN}$. Aleshores, $\angle MBC = 45^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles. El triangle $\overset{\Delta}{MNC}$ és rectangle i isòsceles.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{MNC}$ són semblants.
La raó entre les àrees és el quadrat de la raó entre els costats semblants.

Calculem la raó entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{MNC}$:

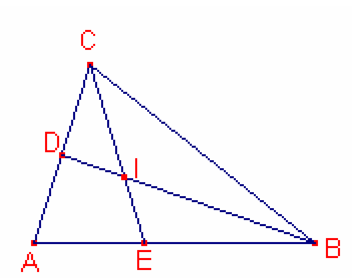
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCM}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c}{2}\sqrt{2}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{c}{2}\sqrt{2}}{\frac{c}{2}}\right)^2 = 2.$$

Problema 82

Demostreu que l'angle que formen les bisectrius dels angle B i C d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a un recte més $\frac{A}{2}$.



Solució:

Siguen $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ bisectrius del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga I el punt intersecció de les bisectrius (l'incentre).
Siguen $\beta = \angle CBD$, $\gamma = \angle BCE$.
Siga $\Omega = \angle BIC$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 180º:

$2\beta + 2\gamma + A = 180^o$, aleshores, $\beta + \gamma = 90^o - \frac{A}{2}$ (1)

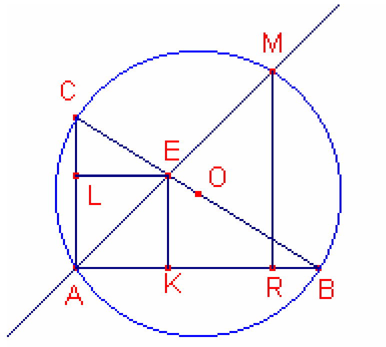
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{IBC}$ és 180º:
$\beta + \gamma + \Omega = 180^o$ (2)
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2) i simplificant:

$\Omega = 90^o + \frac{A}{2}$.

Problema 83

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$. La bisectriu a l'angle A talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E i a la circumferència circumscrita al triangle en M. Siguen K i L els peus de les perpendiculars traçades des del punt E als costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ respectivament.

Demostreu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l'àrea del quadrilàter AKML.



Solució:
ADKL és un quadrat.
Siga $x = \overline{DK} = \overline{DL}$.
Siga R el peu de la perpendicular des del punt M al costat $\overline{AB}$.
Siga $y = \overline{MR}$.

Notem que $\overline{AR} = \overline{MR} = y$ (per ser el triangle $\overset{\Delta}{ARM}$ rectangle i isòsceles).

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DLC}$:

$\mathrm{tgB} = \dfrac{b - x}{x}$, aleshores, $x = \dfrac{b}{1 + \mathrm{tgB}}$

Notem que $\angle MBR = B + 45^o$ (angle inscrit en la circumferència).

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MRB}$:

$\mathrm{tg}(B + 45^o) = \dfrac{y}{c - y}$, aleshores, $y = \dfrac{c \cdot \mathrm{tg}(B + 45^o)}{1 + \mathrm{tg}(B + 45^o)}$.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{AKM}$, $\overset{\Delta}{ALM}$ són iguals.
Calculem l'àrea del quadrilàter AKML:

$$S_{AKML} = 2 \cdot S_{AKM} = 2 \cdot \frac{xy}{2} = \frac{b}{1 + \mathrm{tgB}} \cdot \frac{c \cdot \mathrm{tg}(B + 45^o)}{1 + \mathrm{tg}(B + 45^o)} =$$

$$= bc \cdot \frac{\mathrm{tg}(B + 45^o)}{(1 + \mathrm{tgB})(1 + \mathrm{tg}(B + 45^o))} = bc \cdot \frac{\mathrm{tg}(B + 45^o)}{1 + \mathrm{tg}(B + 45^o) + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgB} \cdot \mathrm{tg}(B + 45^o)} =$$

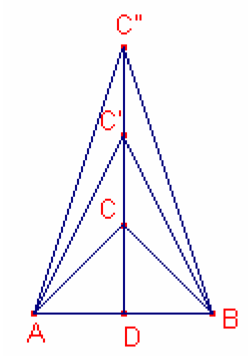
$$= bc \cdot \frac{\dfrac{1 + \mathrm{tgB}}{1 - \mathrm{tgB}}}{1 + \dfrac{1 + \mathrm{tgB}}{1 - \mathrm{tgB}} + \mathrm{tgB} + \mathrm{tgB} \cdot \dfrac{1 + \mathrm{tgB}}{1 - \mathrm{tgB}}} = bc \cdot \frac{1 + \mathrm{tgB}}{2 + 2\mathrm{tgB}} =$$

$$= \frac{bc}{2} = S_{ABC}.$$

Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l'àrea del quadrilàter AKML.

Problema 84

Sobre un segment $\overline{AB} = 2a$ com a base construïm tres triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{AC'B}, \overset{\Delta}{AC''B}$ d'altures a, 2a, 3a, respectivament. Demostreu que la suma dels angles en els vèrtexs C, C', C" d'aquests tres triangles és igual a 180º.



Demostració:

Siga D el punt mig del segment $\overline{AB}$.

Per ser $\overline{AD} = \overline{AC}$ tenim que $\angle ACD = 45^o$, $C = 90^o$.

Siga $\alpha = \angle AC'D$, $\beta = \angle AC''D$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC'}$:

$$tg\alpha = \frac{1}{2}$$

aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC''}$:

$$tg\beta = \frac{1}{3}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1.$$ Aleshores, $\alpha+\beta = 45^o$.

$$C + C' + C'' = C + 2(\alpha+\beta) = 90^o + 2\cdot 45^o = 180^o.$$

Problema 85

En qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'acompleix la següent igualtat:

$$b\cdot\cos B + c\cdot\cos C = a\cdot\cos(B-C)$$

Solució:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{a}{\sin(180^o-(B+C))}$.

Aleshores, $a = b\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B}$

$$a\cdot\cos(B-C) = b\frac{\sin(B+C)}{\sin B}\cos(B-C) =$$

Aplicant transformacions trigonomètriques de productes en sumes:

$$= b\frac{1}{\sin B}\frac{1}{2}(\sin 2B + \sin 2C) =$$

Aplicant relacions trigonomètriques de l'angle doble:

$$= b\frac{1}{\sin B}(\sin B\cos B + \sin C\cos C) =$$

Simplificant i aplicant el teorema dels sinus:

$$= b\cos B + \frac{b}{\sin B}\frac{c\cdot\sin B}{b}\cos C = b\cdot\cos B + c\cdot\cos C.$$

Aleshores, $b\cdot\cos B + c\cdot\cos C = a\cdot\cos(B-C)$.

Problema 86

En qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'acompleix la següent igualtat:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Solució:

Aplicant transformacions trigonomètriques de productes en sumes:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}=$$

$$=2\left(\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=$$

Aplicant transformacions trigonomètriques de productes en sumes:

$$=2\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B+C}{2}+\cos\frac{A+B-C}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B+C}{2}+\cos\frac{A-B-C}{2}\right)\right)=$$

$$=\cos\frac{A+B+C}{2}+\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{A-B+C}{2}+\cos\frac{A-B-C}{2}=$$

$$=\cos 90^{o}+\cos\frac{180^{o}-2C}{2}+\cos\frac{180^{o}-2B}{2}+\cos\frac{-180^{o}+2A}{2}=$$

$$=\sin A+\sin B+\sin C$$

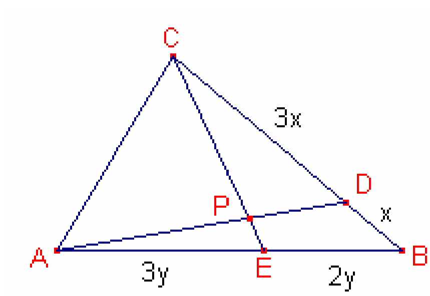
Aleshores, $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Problema 87

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tracem les cevianes $\overline{CE}$, $\overline{AD}$ que es tallen en el punt P, tal que $\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}=\frac{3}{1}$, $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{3}{2}$. Calculeu $r=\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}}$.

Solució:

Notació: Considerarem $[XYZ]$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$.



Siguen $\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=3x$, $\overline{AE}=3y$, $\overline{BE}=2y$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$\frac{[CEB]}{[ABC]}=\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{2}{5}$, aleshores, $[CEB]=\frac{2}{5}[ABC]$

$\frac{[CED]}{[CEB]}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=\frac{1}{4}$, aleshores, $[CED]=\frac{1}{4}[CEB]=\frac{1}{5}[ABC]$

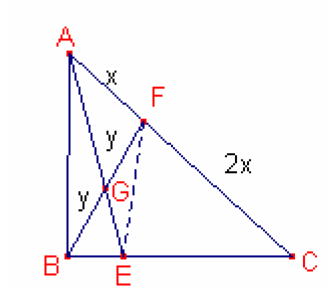
$\frac{[ADC]}{[ABC]}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=\frac{3}{4}$, aleshores, $[ADC]=\frac{3}{4}[ABC]$

$\frac{[CPD]}{[PED]}=\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}}$ $\quad\frac{[CPD]}{[PED]}=\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}}$

Aleshores, $\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}}=\frac{[CPD]+[APC]}{[PED]+[APE]}=\frac{[ADC]}{[AED]}=\frac{\frac{3}{4}[ABC]}{\frac{3}{20}[ABC]}=5$

Problema 88

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ el punt F divideix el costat $\overline{AC}$ en la raó 1:2 (des del vèrtex A). Siga E el punt intersecció del costat $\overline{BC}$ i la recta AG essent G el punt mig de $\overline{BF}$. Calculeu la raó en que divideix E el costat $\overline{BC}$.



Solució:

Notació: Considerarem $[XYZ]$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$.

Siguen $\overline{AF} = x$, $\overline{CF} = 2x$, $\overline{BG} = y$, $\overline{FG} = y$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
$[ABG] = [AGF]$ $\qquad [BGE] = [EGF]$.

$\frac{[ABF]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot [AGF]}{[ABC]} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3}$, aleshores, $[AGF] = \frac{1}{6}[ABC]$.

$\frac{[BFC]}{[ABC]} = \frac{2 \cdot [EGF] + [EFC]}{[ABC]} = \frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} = \frac{2}{3}$, aleshores, $2[EGF] + [EFC] = \frac{2}{3}[ABC]$ (1)

$\frac{[AEF]}{[EFC]} = \frac{[AGF] + [EGF]}{[EFC]} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{2}$, aleshores, $[EFC] = 2 \cdot [AGF] + 2 \cdot [EGF]$

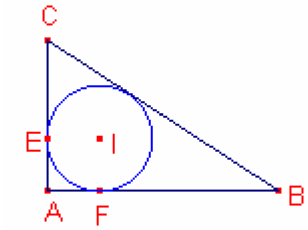
$-2 \cdot [EGF] + [EFC] = \frac{1}{3}[ABC]$ (2)

Sumant i restant les expressions (1) i (2): $[EFC] = \frac{1}{2}[ABC]$, $\quad 2 \cdot [EGF] = \frac{1}{6}[ABC]$.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{2[EGF]}{[EFC]} = \frac{\frac{1}{6}[ABC]}{\frac{1}{2}[ABC]} = \frac{1}{3}.$$

Problema 89

En tots el triangles rectangles el diàmetre de la circumferències inscrita és igual a la suma dels catets menys la hipotenusa.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
Siguen E, F el punts de tangència de la circumferència inscrita i el catets.
Siga r el radi de la circumferència inscrita.
$r = \overline{AE} = \overline{AF}$
La distància d'un vèrtex al punt de tangència de la circumferència inscrita és igual al semiperímetre menys el costat oposat al vèrtex.

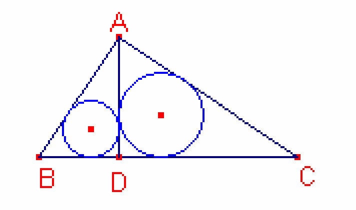
$\overline{AE} = \frac{a+b+c}{2} - a$.

Aleshores,
$2r = a + b + c - 2a = b + c - a$.

Problema 90

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$. Siga $\overline{AD}$ altura del triangle.

Siguen r, r_1, r_2 radis de les circumferències inscrites dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$, respectivament. Proveu que $r^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{c}{a}, \qquad r_1 = \frac{c}{a} r .$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r_2}{r} = \frac{b}{a}, \qquad r_2 = \frac{b}{a} r .$$

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 = \left(\frac{c}{a} r\right)^2 + \left(\frac{b}{a} r\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} r^2 = \frac{a^2}{a^2} r^2 = r^2 .$$