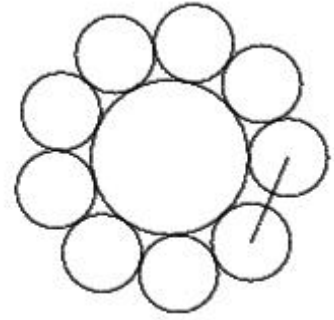


Problemes Crux Mathematicorum

Dibuixem 9 cercles contigus tangents de radi $1/2$ i tangents a un cercle de radi 1.
Calculeu la distància entre els centres del primer i darrer dels cercles.

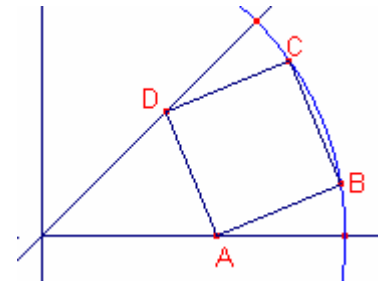
Crux Mathematicorum M294



Un quadrat ABCD està inscrit en un sector circular l'arc la vuitena part d'un cercle de radi 1. Dos dels vèrtexs del quadrat estan en el radi i els dos altres estan en la circumferència. Determineu l'àrea del quadrat. S'exigeix una resposta exacta de

la forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ on a, b, c i d són enters.

Crux Mathematicorum M295



Siga $t_n = n^2 + 20$, per a $n \geq 1$ el terme general d'una successió. Demostreu que per a tot $n \geq 1$, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

Crux Mathematicorum M301

Siga el triangle $\triangle ABC$ tal que $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$. Si P és un punt interior del triangle tal que $\angle PBC = 20^\circ$ i $\angle PCB = 30^\circ$. Demostreu que $\overline{BP} = \overline{BA}$.

Crux Mathematicorum M302

Siguen a, b, c tres nombres reals tal que les sumes $a + b + c$, $ab + bc + ca$ siguin nombres racionals. Demostreu que $a^4 + b^4 + c^4$ és un nombre racional si i només si abc és un nombre racional.

Crux Mathematicorum M304

Resoleu el sistema en els nombres reals:

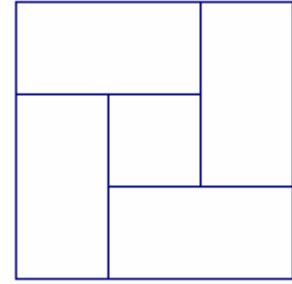
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} = 3 \\ x^2\sqrt{x} + y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} = 3 \end{cases}.$$

Crux Mathematicorum M305

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, i siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. Si D és el peu de la perpendicular de A sobre $\overline{CM}$ i N el punt mig del segment $\overline{DC}$, demostreu que $\overline{BD}$ i $\overline{AN}$ són perpendiculars.

Crux Mathematicorum M308

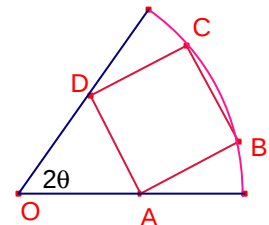
Quatre rectangles iguals estan disposats formant una quadrat de tal forma que estan sobre un altre quadrat més menut. Siga S l'àrea del quadrat exterior i Q l'àrea del quadrat interior. Si l'àrea del quadrat exterior és 9 vegades l'àrea del quadrat interior, determineu la raó dels costats dels rectangles.
Crux Mathematicorum M310



En el triangle $\triangle ABC$, siga D el punt d'intersecció de $\overline{AB}$ amb la bisectriu interior de l'angle C, i siga E el punt mig de $\overline{AB}$. Demostreu que $\overline{CD} + \overline{CE} < \overline{BC} + \overline{AC}$.
Crux Mathematicorum M315

Calculeu $\sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$.
Crux Mathematicorum M316

Siga el quadrat ABCD inscrit en un sector circular de radi 1 que té dos vèrtexs en l'arc i dos sobre els radis frontera (veure figura). Si l'angle central mesura 2θ , determineu el valor θ que fa l'àrea del quadrat màxima.
Crux Mathematicorum M317



Si h i a són la hipotenusa i l'altura, respectivament, d'un triangle rectangle, proveu que $\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \geq \frac{5}{2}$.
Crux Mathematicorum M319

Si p i q són dos nombres primers bessons, aleshores els nombres $p^4 + 4$ i $q^4 + 4$ són primers entre ells.
Crux Mathematicorum M320

Siguen a, b, c tres nombres reals positius. Demostreu que:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Crux Mathematicorum M322

Determineu les solucions reals (x, y) de l'equació $20 \sin x - 21 \cos x = 81y^2 - 18y + 30$.
Crux Mathematicorum M323

Dues funcions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ són definides per

$$f(x) = 3x - 1 + |2x + 1|, \quad g(x) = \frac{1}{5}(3x + 5 - |2x + 5|). \text{ Demostreu que } g \circ f = f \circ g,$$

$$(f \circ f)^{-1} = g \circ g.$$

Crux Mathematicorum M324

Siga el nombre en base 10, $a89b_{(10)}$, determineu a i b a fi

$$\text{que } a89b_{(10)} - 5904_{(10)} = b98a_{(10)}.$$

Crux Mathematicorum M326

Catherine s'ha comprat una nova goma d'esborrar en forma de prisma rectangular, les diagonals de les cares mesuren 10, $\sqrt{61}$ i $\sqrt{89}$. Quin és el volum de la goma de Catherine?

Crux Mathematicorum M327

Demostreu que per a qualsevol nombre enter positiu li restem la suma de cadascuna de les seues xifres elevades a una potència imparella qualsevol (no necessàriament la mateixa), s'obté un múltiple de 3.

Crux Mathematicorum M328.

$$\text{Determineu el valor de } \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ + \cos^2 90^\circ.$$

Crux Mathematicorum M329

Siga n un enter positiu. Es defineix el n nombre triangular T_n com la suma

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Determineu tots els parells de nombres triangulars tal que la diferència siga 2008.

Crux Mathematicorum M330

Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ i les diagonals es tallen en el punt P.

a) Si l'àrea del triangle $\triangle APB$ és 4 i la del triangle $\triangle DPC$ és 9,

(i) Demostreu que $\overline{AP} : \overline{PC} = 2 : 3$.

(ii) Expliqueu per què la raó de les superfícies dels triangles $\triangle BPC$ i $\triangle BPA$ és igual a 3:2

(iii) Determineu l'àrea del trapezi ABCD.

b) Si l'àrea del triangle $\triangle APB$ és x i la del triangle $\triangle DPC$ és y , determineu l'àrea del trapezi ABCD en funció de x i y .

Crux Mathematicorum M331

El radi i l'altura d'un cilindre circular, recte i tancat són dos nombres naturals. El valor del seu volum és quatre vegades el de la superfície total (bases incloses). Determineu les dimensions del cilindre de volum mínim.

Crux Mathematicorum M332.

a) Determineu tots els enters x per als quals $\frac{x-3}{3x-2}$ és un enter.

b) Determineu tots els enters y per als quals $\frac{3y^3+3}{3y^2+y-2}$ és un enter.

Crux Mathematicorum M334

En una successió de quatre nombres, el segon es el doble del primer. A més a més, la suma del primer i del quart és 9, la suma del segon i del tercer és 7, i la suma dels quadrats dels quatre nombres és 78. Determineu totes les successions que tenen aquesta propietat.

Crux Mathematicorum M335

Un punt "reseau" és un punt (x,y) del plànol tal que les coordenades x, y són enteres. Siga n un enter positiu.

Determineu els punts "reseau" tals que estan a l'interior de la regió $|x| + |y| \leq n$.

Crux Mathematicorum M336.

Sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ d'un rectangle $ABCD$ amb $\overline{AD} < \overline{AB}$ s'ha escollit els punts F i E tal que $AFCE$ formen un rombe.

a) Si $\overline{AB} = 16$ i $\overline{BC} = 12$, determineu $\overline{EF}$.

b) Si $\overline{AB} = x$ i $\overline{BC} = y$, determineu $\overline{EF}$ en funció de x i y .

Crux Mathematicorum M337.

Dos estudiants fan un error copiant l'equació quadràtica $x^2 + bx + c = 0$ que el seu professor ha escrit a la pissarra. Joan ha escrit b correctament, però no c , aleshores la seua equació té per arrels 5 i 4. Víctor escriu c correctament, però no b , la seua equació té per arrels 2 i 4. Quines són les solucions de l'equació original.

Crux Mathematicorum M338

Determineu el nombre d'enters entre 100 i 199, ambdós inclosos, que tenen exactament dos xifres iguals.

a) S'escull un enter entre 1 i 999 a l'atzar (cada enter té la mateixa probabilitat d'eixir). Quin és la probabilitat que l'enter escollit tinga exactament dues xifres iguals.

Crux Mathematicorum M339

Siga $\triangle ABC$ un triangle isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$, siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga P un punt qualsevol del segment $\overline{BM}$. Pel punt P es traça la perpendicular al costat $\overline{BC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en K i a la recta AC en T. Demostreu que $\overline{PK} + \overline{PT}$ és constant.
Crux Mathematicorum M340

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$. Els catets $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ estan en proporció 3:2. L'altura $\overline{BD}$ divideix la hipotenusa $\overline{CA}$ en dues parts, tal que la seua diferència és 10. Calculeu la longitud de la hipotenusa $\overline{CA}$.
Crux Mathematicorum M341

Sophie i Céline han de desplaçar unes caixes, 10 grans i 10 menudes. En la taula s'indica el temps requerit per fer-ho, per cada caixa i persona.

	Céline	Sophie
Caixa menuda	1min.	3min.
Caixa gran	6min.	5min.

El treball comença a les 9h del matí. Determineu a quina hora, en temps en què hauran fet la feina.
Crux Mathematicorum M342

Siga la successió recurrent de Fibonacci:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Alguns termes de la successió són: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,....

Calculeu la suma dels 100 primers nombres parells d'aquesta llista.

Crux Mathematicorum M343

S'ha construït el quadrat

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Format pels nombres de 1 a 9 en ordre creixent, línia a línia. La suma dels enters que formen les diagonals és 15. Si construïm un quadrat semblant amb els enters de 1 a 10000, quina serà la suma de cadascuna de les diagonals.

Crux Mathematicorum M344

L'àrea d'un triangle equilàter $\triangle ABC$ és $q\sqrt{15}$. Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$ determineu el perímetre del triangle en funció de q.

Crux Mathematicorum M345

Determineu el nombre de xifres que conté l'enter 2^{80} sense ajuda d'una calculadora.

Crux Mathematicorum M346

Resoleu el sistema
$$\begin{cases} (a+b+c)d = 420 \\ (a+c+d)b = 403 \\ (a+b+d)c = 363 \\ (b+c+d)a = 228 \end{cases}$$
 tal que a, b, c, d són enters positius.

Crux Mathematicorum M347

El perímetre d'un sector circular és 12 (el perímetre inclou els dos radis). Determineu el radi del cercle de màxima àrea d'aquest tipus de sector.

Crux Mathematicorum M348

a) Determineu els parells de nombres enters (x,y) tal que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

b) Calculeu el nombre de solucions enteres (x,y) de l'equació $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1200}$.

Crux Mathematicorum M349

Daniel recorre amb bicicleta de Montignez a Boncourt. Una tercera part del camí és de pujada, una tercera part decendent i la resta plana. La velocitat mitjana del tram de pujada és de 16km/h i la del tram pla 24km/h. Si la velocitat mitjana del trajecte es de 24km/h. Quina és la velocitat mitjana del tram de baixada.

Crux Mathematicorum M350

Siga C un punt sobre la circumferència de centre O i radi r . Siga $\overline{AB}$ una corda de longitud r paral·lela a $\overline{OC}$. La recta AO talla la circumferència en E i talla la tangent a la circumferència per C en el punt F . La corda $\overline{BE}$ talla el segment $\overline{OC}$ en el punt L , i la recta AL talla $\overline{CF}$ en M . Determineu la raó $\overline{CF} : \overline{CM}$.

Crux Mathematicorum M351.

Determineu el parell (x, y) de nombres tal que $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$.

Crux Mathematicorum M353.

Sense utilitzar calculadora factoritzeu en factors primers $3^{20} + 3^{19} - 12$

Crux Mathematicorum M354.

Siga un con de revolució de vèrtex C i una base de radi 8 i apotema 24.

Siga A, B dos punts de la circumferència base situats sobre un diàmetre, i P un punt sobre el segment $\overline{CB}$.

a) Si $\overline{CP} = 18$, determineu el camí més curt sobre el con partint de A i passant per P i finalitzant en A .

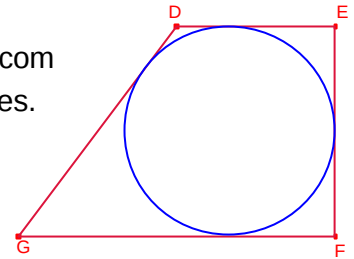
b) Trobeu la posició de P sobre $\overline{CB}$ que minimitza la longitud més curta del camí mencionat en a).

Crux Mathematicorum M355

Determineu les solucions reals de l'equació $3^{2x} + 3 = 3^x + 3^{x+3}$.
Crux Mathematicorum M357.

Quants enters de la llista $1, 2008, 2008^2, \dots, 2008^{2009}$ són a la vegada quadrats perfectes i cubs perfectes?
Crux Mathematicorum M358.

Un trapezi DEFG està circumscribit a una circumferència de radi 2, com indica la figura. Els costats $\overline{DE}$ i $\overline{GF}$ mesuren 3 i els angles E i F són rectes. Determineu l'àrea del trapezi.
Crux Mathematicorum M359



Determineu tots els enters positius que satisfan $3^x = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
Crux Mathematicorum M360.

Siguen a, b, c tres nombres reals positius. Demostreu que:
 $ab(a + b - c) + bc(b + c - a) + ca(c + a - b) \geq 3abc$.
Crux Mathematicorum M361.

Siga A un enter positiu de sis xifres i B l'enter positiu format per les xifres de A en ordre invers.
 Demostreu que $A - B$ és múltiple de 9.
Crux Mathematicorum M363.

En un semicercle de radi 2 i diàmetre $\overline{AB}$, es dibuixa un quadrat PQRS amb P i Q sobre el semicercle, i R i S sobre $\overline{AB}$. L'àrea del quadrat és més petita o més gran que la meitat de l'àrea del semicercle?
Crux Mathematicorum M364.

Siguen p, q, r les arrels de l'equació $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Trobeu una equació quadràtica que les arrels siguin $p^2 + q^2 + r^2$ i $p + q + r$.
Crux Mathematicorum M366.

Siguen a, b, c tres nombres reals positius tal que $a + b + c = 6$.
 Determineu el valor màxim possible de $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.
Crux Mathematicorum M367.

Siguen $A(0,0), B(6,0), C(6,4)$ i $D(0,4)$ els vèrtexs d'un rectangle.
 Pel punt $P(4,3)$ tracem dues rectes: una recta horitzontal que talla BC en M i AD en N i una altra recta vertical que talla la AB en Q i CD en R .
 Demostreu que les rectes AP, DM i BR passen per un mateix punt.
Crux Mathematicorum M369.

Un segment $\overline{AB}$ de longitud 3 conté un punt C tal que $\overline{AC} = 2$. Sobre el mateix costat del segment $\overline{AB}$ s'han construït els triangles equilàters $\triangle ACF$ i $\triangle CBE$.

Determineu l'àrea del triangle $\triangle AKE$ si K és el punt mig de $\overline{FC}$.

Crux Mathematicorum M371.

Siga x un nombre real que satisfà $x^3 = x + 1$.

Determineu els enters a, b, i c tal que $x^7 = ax^2 + bx + c$

Crux Mathematicorum M372.

Determineu totes les solucions reals del sistema d'equacions

$$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} = 4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad xyz = \frac{9}{2}.$$

Crux Mathematicorum M375.

Resoleu l'equació $(10^{2009} + 25)^2 - (10^{2009} - 25)^2 = 10^x$.

Crux Mathematicorum M376

Determineu la successió aritmètica formada per 9 enters positius de tal forma que la suma estiga entre 200 i 220, i el segon terme val 12.

Crux Mathematicorum M377

Siguen els punts C i D de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.

Siga P la intersecció de les rectes CB i DA, i siga Q la intersecció de les rectes AC i BD. Demostreu que la recta PQ és perpendicular a AB.

Crux Mathematicorum M378.

Els enters $27 + C$, $555 + C$, $1371 + C$ són tots quadrats perfectes i les seues arrels formen una progressió aritmètica. Determineu tots els valors possibles de C.

Crux Mathematicorum M379

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, siga $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ tal que $a \geq b$. Exterior al

triangle $\triangle ABC$ s'han construït els quadrats ABDE, BCFG i CAHI. Siguen P, Q, R les interseccions de les rectes FI i EH, FI i DG, DG i EH, respectivament. Determineu el

valor $\frac{b}{a}$ a fi que el triangle $\triangle PQR$ siga rectangle.

Crux Mathematicorum M380.

Determineu totes les solucions de l'equació:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x-6} + \frac{7}{x-7} = x^2 - 4x - 4$$

Crux Mathematicorum M381.

Determineu els parells (x, y) d'enters tals que $4x^2 - y^2 = 480$.

Crux Mathematicorum M382.

En un rectangle ABCD siga P sobre $\overline{BC}$ i Q sobre $\overline{DC}$ tal que $\overline{BP} = 1$, $\overline{AP} = \overline{PQ} = 2$ i l'angle $\angle APQ = 90^\circ$. Determineu la mesura de $\overline{QD}$

Crux Mathematicorum M383.

En la figura, el punt E està sobre el costat $\overline{AB}$ i D sobre el costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{DC} = 1$ i $\overline{AD} = 2$. Determineu la raó entre l'àrea del quadrilàter BCDE i l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Crux Mathematicorum 384

En base 10 un nombre natural $N = 1\dots 114\dots 44$ comença amb 2009 xifres 1 consecutives, seguides de 4018 xifres 4 consecutives. Demostreu que N no és un quadrat perfecte.

Crux Mathematicorum M385.

Determineu tots els nombres reals pels quals

$$\sqrt{2 + 4x - 2x^2} + \sqrt{6 + 6x - 3x^2} = x^2 - 2x + 6$$

Crux Mathematicorum M386

La temperatura es pot mesurar amb graus Fahrenheit (F) o en graus Celcius (C). Les dues escales estan relacionades per la fórmula $F = 1.8C + 32$.

Al convertir en Fahrenheit una temperatura donada en Celsius per un nombre de dues xifres, es constata que una vegada les mesures Fahrenheit arrodonides a l'enter més proper les unitats i les desenes han estat permutades. Determineu els valors enters de dues xifres en C per a les quals es compleix la propietat.

Crux Mathematicorum M387.

Es forma una successió escrivint en ordre creixent, per a cada enter n, els múltiples de n compresos entre n i n^2 . La successió comença així:

1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, 6, 12,.....

Determineu el terme 2009 de la successió.

Crux Mathematicorum M388.

2009 estudiants tenen cadascun una carta amb un nombre enter positiu diferent. La suma d'aquestes cartes és 2020049. Quins valors possibles per a la mediana dels nombres de les cartes.

Crux Mathematicorum M389.

Un triangle pitagòric (rectangle i els 3 costats són mesures nombres naturals) de catets a i b la longitud de l'altura sobre la hipotenusa és h. Determineu tots els triangles tals

que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h} = 1$.

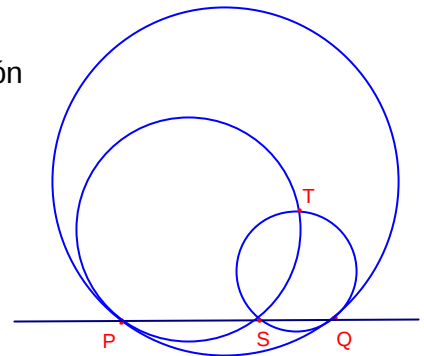
Crux Mathematicorum M390.

Determineu els parells (a, b) de nombres enters positius pels quals $\frac{a+1}{b}$ i $\frac{b+2}{a}$ són enters positius.

Crux Mathematicorum M391

En la figura següent, els cercles menuts tenen radis a, b i són tangents al cercle gran de radi r en els punts P i Q . Les circumferències menudes s'intersequen en S i T .
Proveu que si P, S, Q estan alineats aleshores, $r = a + b$

Crux Mathematicorum M393.



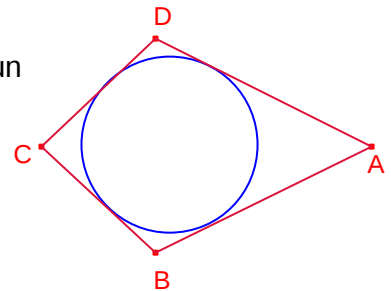
Els nombres a, b, c, d i e són cinc enters consecutius. Demostreu que la diferència entre la mitjana dels quadrats de c i e i la dels quadrats de a i c és igual a quatre vegades c .

Crux Mathematicorum M394

El quadrilàter $ABCD$ és tal que els seus costats són tangents a un cercle donat com el de la figura.

Si $\overline{AB} = \overline{AD}$, demostreu que $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Crux Mathematicorum M395.



En un rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 8$ i $\overline{BC} = 6$ s'han inscrit dos cercles de centres O_1 i O_2 en els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$, respectivament. Determineu la distància entre O_1 i O_2 .

Crux Mathematicorum M396.

Determineu tots els parells (x, y) d'enters tals que

$$x^4 - x + 1 = y^2.$$

Crux Mathematicorum M397

a) Siguen r, s i t les arrels de l'equació cúbica $w^3 - bw^2 + cw - d = 0$.

Determineu b, c i d en termes de r, s i t .

b) Suposem que a és un nombre real. Determineu totes les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = -1 \\ xyz = -a \end{cases}$$

Crux mathematicorum M398.

Determineu les ternes (a,b,c) d'enters positius tal que $\frac{3ab-1}{abc+1}$ siga un enter positiu.

Crux Mathematicorum M399.

Els antics egipcis escrivien les fraccions en termes de fraccions unitàries distintes, és a dir, fraccions distintes amb 1 com a numerador. Per exemple, per escriure $\frac{11}{12}$ haurien

escrit $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. La fracció unitària $\frac{1}{2}$ pot ser escrita amb altres fraccions unitàries

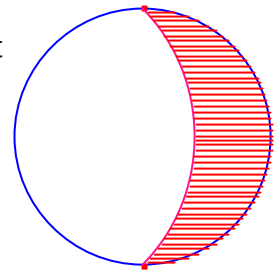
com $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Trobeu una família infinita de fraccions unitàries, cadascuna que puga

ser escrita com suma de dues fraccions unitàries.

Crux Mathematicorum Totten-M1.

La frontera de l'ombra sobre la lluna es sempre un arc de cercle. Un cert dia, es constata que l'ombra de la lluna passa per dos punts diametralment oposats. Si el centre de l'arc que forma aquesta ombra es troba sobre la circumferència de la lluna, determineu la proporció exacta de la lluna que no està en la ombra, és a dir la que es veu.

Crux Mathematicorum. Totten-M2.



Demostreu que l'equació quadràtica $ax^2 + bx + c = 0$ no té solució racional si a, b, i c són enters imparells.

Crux Mathematicorum Totten-M3.

En un sondeig es demana a certs estudiant si estimen el color taronja. Dels xics, exactament el 2% ha respost que sí, mentre que les xiques la proporció exacta de sí ha estat el 59%. En el total d'enquestats, exactament el 17% de les respostes han dit que estimaven el color taronja. Es demana de trobar el més petit nombre possible de participants en el sondeig.

Crux Mathematicorum. Totten-M4.

Siga $a \neq 1$ un nombre real positiu. Determineu tots els parells d'enters positius (x,y) tals que $\log_a x - \log_a y = \log_a (x - y)$.

Crux Mathematicorum. Totten-M5.

Un tren de 900m de longitud s'apropa a un pont de longitud 100m a una velocitat de 90km/h.

a) En quants segons travessarà el pont?

b) Suposem que en el moment d'arribar al pont, el tren desaccelera 0.2m/s^2 . Quant de temps trigarà aquesta vegada en travessar el pont?

Crux Mathematicorum. Totten-M9.

Volem construir un camp de gespa i vegem que si la fem 8 més ampla i 9 metres més estreta l'àrea és la mateixa i si la fem 12 metres més curta i 16 més llarga, l'àrea és la mateixa.

Calculeu les dimensions del camp de gespa.

Crux Mathematicorum M401.

Determineu les solucions enteres de l'equació:

$$a^b b^a + a^b + b^a = 89.$$

Crux Mathematicorum M402.

Joan ha escrit un programa en l'ordinador per a provar si un enter major que 1 és un nombre primer. La seua astuta germana Alícia, ha editat el codi i ha trobat que si l'enter és imparell, la probabilitat que el programa done resposta correcta és del 52% i si l'entrada és parella, la probabilitat és del 98%. Joan verifica el programa provant dos enters més grans que 1 escollits a l'atzar. Quina és la probabilitat que les dues respostes siguin correctes.

Crux Mathematicorum M403

Determineu una fórmula que done el valor de la suma

$$S = 17 + 187 + 1887 + 18887 + \dots + 188\dots87$$

on el darrer terme conté exactament n xifres 8.

Crux Mathematicorum M405.

El quadrat ABCD està inscrit en la vuitena part d'un cercle de radi 1 i centre O, de manera que té un vèrtex en cada radi i els altres vèrtex B, C sobre l'arc. El quadrat

EFGH està inscrit en el triangle $\triangle DOA$ de manera que E i H estan sobre els radis i F i G sobre el segment $\overline{AD}$, del problema M295 sabem que l'àrea del quadrat ABCD és

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{3}.$$

Determineu l'àrea del quadrat EFGH.

Crux Mathematicorum M406.

Decidiu si el quadrat del costat és un quadrat màgic 4×4 utilitzant els enters de 1 a 16. (En un quadrat màgic, la suma dels nombres de cada fila, cada columna i cada diagonal són iguals).

			12
	16	1	10
	2	15	8

Crux Mathematicorum M407

Determineu tots els enters positius $\overline{abc}$ que satisfan l'equació $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$. (On designem $\overline{abc}$ l'enter de tres xifres tal que la xifra de les centenes és a, la xifra de les desenes és b i la xifra de les unitats és c.

Crux Mathematicorum M408

Les tres altures d'un triangle estan sobre les rectes d'equacions $y = x$, $y = -2x + 3$ i $x = 1$. Si un dels vèrtexs té coordenades (5,5) determineu les coordenades dels altres dos vèrtexs.

Crux Mathematicorum M409.

Un cub d'aresta a , un tetraedre regular d'aresta b i un octaedre regular d'aresta c tenen la mateixa superfície. Calculeu el valor de $\frac{\sqrt{bc}}{a}$.

Crux Mathematicorum M410

Siguen a, b, c els costats d'un triangle $\triangle ABC$.

Si $2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20$, demostreu que el triangle és rectangle.

Crux Mathematicorum M411.

Si x és un nombre real, designem $[x]$ part entera de x és igual a l'enter més petit o igual a x , i designem $\{x\}$ part decimal de x com $\{x\} = x - [x]$. Determineu tots els nombres reals x tal que $[x] \cdot \{x\} = x$.

Crux Mathematicorum M412.

Determineu els nombres naturals de tres xifres tal que el producte de les 3 xifres siga 36.

Crux Mathematicorum M413

Considerem la llista de naturals, ordenada en orde creixent, que poden ser expressats com la suma de 21 nombres enters consecutius (no necessàriament positius).

Determineu el que ocupa la posició 21ena d'aquesta llista.

Crux Mathematicorum M414.

Els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ d'un trapezi ABCD són paral·lels. Si $\overline{AB} = 15$, $\overline{CD} = 30$, $\overline{AD} = 9$ i $\overline{BC} = 12$, determineu l'àrea del trapezi ABCD.

Crux Mathematicorum M415.

Demostreu que $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ és divisible per 9 per a tot enter no negatiu.

Crux Mathematicorum M416

Siga $M = \{x^2 + 4xy + y^2, \text{ tal que } x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Demostreu que el nombre 2022 pertany a M i que 11 no pertany a M .

Crux Mathematicorum M417.

Ricard és un estudiant pobre i amb molta gana i un matemàtic astut.
 Fa notar que en la residència, 5 sopars costen el mateix que 7 dinars. Després de saltar-se gairebé tots els sopars d'una setmana constata que 5 dinars i un sopar costen 48€ en total.
 Quan costen 16 sopars.
Crux Mathematicorum M420.

Siga $[x]$ part entera de x . Resoleu l'equació:

$$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 4.$$

Crux Mathematicorum M421.

Demostreu que $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

Crux Mathematicorum M422.

La diferència entre les xifres de les desenes i les unitats d'un quadrat perfecte S és 3.
 Determineu tots els residus de la divisió de S per 100.
Crux Mathematicorum M423.

En la figura els segments $\overline{AB}$, $\overline{CDE}$, $\overline{FGH}$ són paral·lels. A més a més, els segments $\overline{ACF}$, $\overline{BDG}$ són perpendiculars a $\overline{AB}$.

Si les àrees dels rectangles $ABDC$, $CDGF$ i dels triangle $\triangle BDE$ són x , y , z , respectivament. Determineu l'àrea del trapezi $DEHG$. En funció de x , y , z .
Crux Mathematicorum M424.

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siga I l' incentre del triangle.

La bisectriu interior de l'angle C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D .

La recta que passa per D i és perpendicular a $\overline{BI}$ talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E .

La recta que passa per D i és paral·lela a $\overline{BI}$ talla el costat $\overline{AC}$ en el punt F .

Demostreu que els punts E , I , F estan alineats.

Crux Mathematicorum M425.

Determineu el nombre d'enters positius més menuts o iguals a 10000000 que siguen divisibles per els enters 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Crux Mathematicorum M426.

Sobre un semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ es dibuixa un triangle equilàter $\triangle ABC$.

Determineu l'àrea de la regió compresa a l'interior del triangle i exterior al semicercle

Crux Mathematicorum M427

Determineu tots els enters x pels quals $(4-x)^{4-x} + (3-x)^{3-x} + 20 = 4^x + 3^x$

Crux Mathematicorum M428.

Determineu totes les ternes (a,b,c) d'enters positius tals que $a^{(b^c)} = (a^b)^c$.

Crux Mathematicorum M429.

Determineu el valor $d > 0$ tal que l'àrea del quadrilàter de vèrtexs $A(0,2)$, $B(4,6)$, $C(7,5)$, $D(d,0)$ és 24.

Crux Mathematicorum M432.

En un triangle $\triangle ABC$ $\overline{AB} < \overline{BC}$, L és el punt mig del costat $\overline{AC}$ i M és el punt mig del costat $\overline{AB}$. Si P es un punt del segment $\overline{LM}$ tal que $\overline{MP} = \overline{MA}$. Proveu que $\angle PBA = \angle PBC$.

Crux Mathematicorum M433

Determineu tots els 8 dígit positius del nombre $abcdefgh$ que satisfan les relacions $a^3 - b^2 = 2$, $c^3 - d^2 = 4$, $2^e - f^2 = 7$, $g^3 - h^2 = -1$.

Crux Mathematicorum M434.

Demostreu que
$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Crux Mathematicorum M435.