

Dibuixem 9 cercles contigus tangents de radi $\frac{1}{2}$ i tangents a un cercle de radi 1.
Calculeu la distància entre els centres del primer i darrer dels cercles.

Crux Mathematicorum M294

Solució:

Siguem els centres del primer i segon cercle de radi $\frac{1}{2}$.

Per ser tangents els cercles de radi $\frac{1}{2}$, $\overline{AB} = 1$

Siga O el centre del cercle de radi 1, $\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{3}{2}$.

Siga C el punt de tangència dels dos primers cercles de radi $\frac{1}{2}$.

Siga $\alpha = \angle AOC$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle

$\triangle ACA$, $C = 90^\circ$:

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Siga D el centre de l'últim cercle de radi $\frac{1}{2}$.

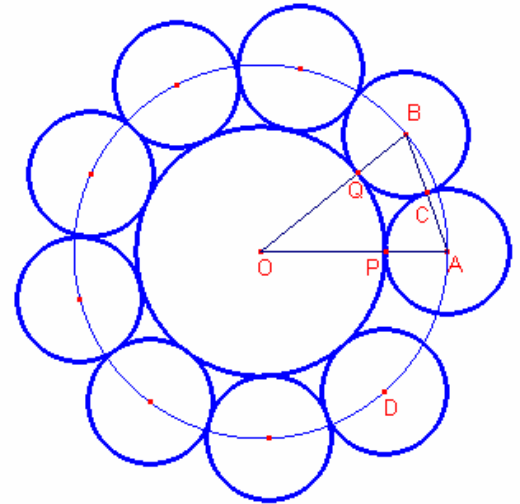
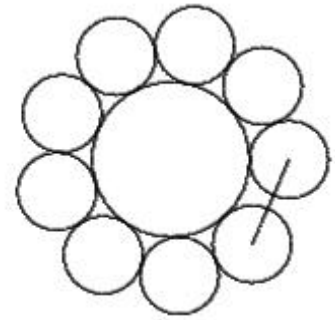
$$\angle AOD = 360^\circ - 16\alpha = 360^\circ - 16 \cdot \arcsin \frac{1}{3} = 48^\circ 27' 37''.$$

Siga $d = \overline{AD}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OAD$:

$$d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cos 48^\circ 27' 37''$$

$$d = 1.231208319$$



Un quadrat ABCD està inscrit en un sector circular l'arc la vuitena part d'un cercle de radi 1. Dos dels vèrtexs del quadrat estan en el radi i els dos altres estan en la circumferència. Determineu l'àrea del quadrat. S'exigeix una resposta exacta de la forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ on a, b, c i d són enters.

Crux Mathematicorum M295

Solució:

Siga $c = \overline{AB}$ el costat del quadrat.

L'àrea del quadrat és c^2 .

Siga $x = \overline{OP}$. $\overline{OB} = 1$.

$$\angle AOP = \frac{45^\circ}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OPA$:

$$\frac{c}{2x} = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Aleshores: } x = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} c = \frac{1+\sqrt{2}}{2} c.$$

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{AB} = \frac{3+\sqrt{2}}{2} c.$$

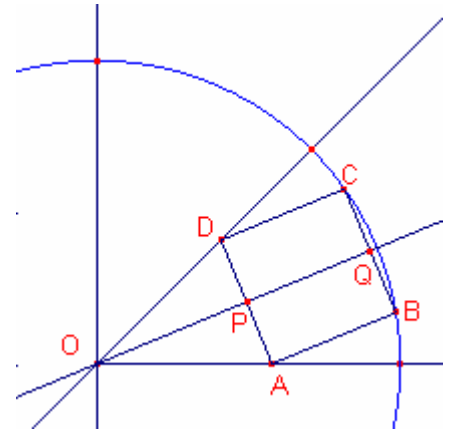
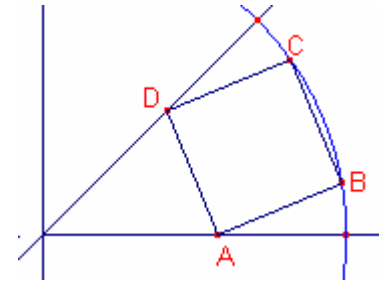
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle OBQ$:

$$\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} c \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 = 1^2.$$

$$\frac{6+3\sqrt{2}}{2} c^2 = 1.$$

L'àrea del quadrat és:

$$c^2 = \frac{2}{6+3\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$



Siga $t_n = n^2 + 20$, per a $n \geq 1$ el terme general d'una successió. Demostreu que per a tot $n \geq 1$, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

Crux Mathematicorum M301

Solució:

Siga $a, b \in \mathbb{Z}$, $a = bq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$. Aleshores, $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$.

$$t_{n+1} = n^2 + 2n + 21.$$

Apliquem l'algoritme d'Euclides per a calcular el màxim comú divisor (mcd):

	1
$t_{n+1} = n^2 + 2n + 21$	$t_n = n^2 + 20$
$2n + 1$	

$$\text{mcd}(t_{n+1}, t_n) = \text{mcd}(t_n, 2n + 1).$$

Estudiem dos casos.

a)

Suposem que n és parell $n = 2k$, $t_n = 4k^2 + 20$, $2n + 1 = 4k + 1$.

	k	-4
$t_n = 4k^2 + 20$	$2n + 1 = 4k + 1$	$-k + 20$
$-k + 20$	81	

$$\text{mcd}(t_{n+1}, t_n) = \text{mcd}(t_n, 2n + 1) = \text{mcd}(2k + 1, 81).$$

Aleshores, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

b)

Suposem que n és imparell $n = 2k + 1$, $t_n = 4k^2 + 2k + 21$, $2n + 1 = 4k + 3$.

	k	-4
$t_n = 4k^2 + 2k + 21$	$2n + 1 = 4k + 3$	$-k + 21$
$-k + 21$	-81	

$$\text{mcd}(t_{n+1}, t_n) = \text{mcd}(t_n, 2n + 1) = \text{mcd}(2n + 1, -81).$$

Aleshores, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

Siga el triangle $\triangle ABC$ tal que $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$. Si P és un punt interior del triangle tal que $\angle PBC = 20^\circ$ i $\angle PCB = 30^\circ$. Demostreu que $\overline{BP} = \overline{BA}$.
Crux Mathematicorum M302

Solució:

El triangle $\triangle ABC$ és isòsceles i $\angle BAC = 100^\circ$.
Siga $b = \overline{AC} = \overline{AB}$, $a = \overline{BC}$.
 $\angle BPC = 130^\circ$

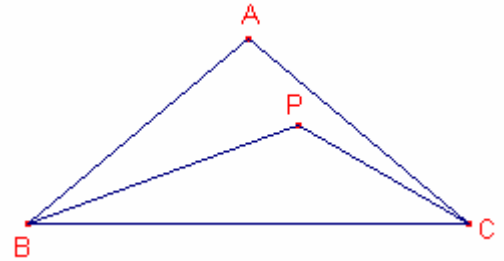
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin 100^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}.$$
$$\frac{a}{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}. \text{ Simplificant: } a = 2b \cdot \cos 40^\circ.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BCP$:

$$\frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\sin 130^\circ} \cdot \frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\cos 40^\circ}$$
$$\frac{\overline{BP}}{\sin 30^\circ} = \frac{2b \cdot \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}. \text{ Simplificant: } \frac{\overline{BP}}{b} = 2 \cdot \sin 30^\circ = 1.$$

Aleshores, $\overline{BP} = b = \overline{BA}$.



Siguen a, b, c tres nombres reals tal que les sumes $a + b + c$, $ab + bc + ca$ siguen nombres racionals. Demostreu que $a^4 + b^4 + c^4$ és un nombre racional si i només si abc és un nombre racional.

Crux Mathematicorum M304

Solució:

Siga $p = a + b + c \in \mathbb{Q}$, $q = ab + bc + ca \in \mathbb{Q}$, $r = abc \in \mathbb{R}$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

$$\text{Aleshores, } a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q \quad (1)$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ són solucions de l'equació: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

$$x^3 = px^2 - qx + r.$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= pa^2 - qa + r + pb^2 - qb + r + pc^2 - qc + r = \\ &= p(a^2 + b^2 + c^2) + q(a + b + c) + 3r. \end{aligned}$$

Substituint l'expressió (1):

$$a^3 + b^3 + c^3 = p(p^2 - 2q) + qp + 3r = p^3 - pq + 3r \quad (2)$$

$x^4 = px^3 - qx^2 + rx$, a, b, c són solucions d'aquesta equació. Aleshores:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= pa^3 - qa^2 + ra + pb^3 - qb^2 + rb + pc^3 - qc^2 + rc = \\ &= p(a^3 + b^3 + c^3) + q(a^2 + b^2 + c^2) + r(a + b + c) \end{aligned}$$

Substituint l'expressió (1) i (2):

$$a^4 + b^4 + c^4 = p(p^3 - pq + 3r) + q(p^2 - 2q) + rp = p^4 - 2q^2 + 4pr \quad (3)$$

Vegem la tesi del problema.

Si $r = abc \in \mathbb{Q}$ de la identitat (3) tenim que $a^4 + b^4 + c^4$ és racional.

Si $a^4 + b^4 + c^4$ és racional i $p \neq 0$, de la identitat (3) tenim que $r = abc \in \mathbb{Q}$.

Si $a^4 + b^4 + c^4$ és racional i $p = 0$, de la identitat (3) $a^4 + b^4 + c^4 = -2q^2$.

Aleshores, $q = 0$, $a^4 + b^4 + c^4 = 0$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ són solucions de l'equació: $x^3 - r = 0$. Aleshores, $r = 0$.

Resoleu el sistema en els nombres reals:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} = 3 \\ x^2\sqrt{x} + y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} = 3 \end{cases}.$$

Crux Mathematicorum M305

Solució:

Notem que $x, y, z > 0$. Si $x = 0$ el sistema $\begin{cases} \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ y\sqrt{y} + z\sqrt{z} = 3 \\ y^2\sqrt{y} + z^2\sqrt{z} = 3 \end{cases}$ no té solució real.

Siguen $a = \sqrt{x} > 0$, $b = \sqrt{y} > 0$, $c = \sqrt{z} > 0$.

Els sistema quedaria: $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 3 \\ a^5 + b^5 + c^5 = 3 \end{cases}$.

Efectuem el canvi $u = a + b$, $v = ab$. $u > 0$, $v > 0$.

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Aleshores $a^3 + b^3 = u^3 - 3uv$

$c = 3 - u$. Aleshores, $c^3 = -u^3 + 9u^2 - 27u + 27$

$(a+b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a^3 + b^3) + 10(ab)^2(a+b)$. Aleshores

$a^5 + b^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$

$c = 3 - u$. Aleshores, $c^5 = -u^5 + 15u^4 - 90u^3 + 270u^2 - 405u + 243$

Substituint en la segona i tercera equació:

$$\begin{cases} 3u^2 - 9u - uv = -8 \\ 3u^4 - 18u^3 + 54u^2 - 81u + uv^2 - u^3v = -48 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} v = \frac{3u^2 - 9u + 8}{u} \\ 3u^4 - 18u^3 + 54u^2 - 81u + u\left(\frac{3u^2 - 9u + 8}{u}\right)^2 - u^3\left(\frac{3u^2 - 9u + 8}{u}\right) = -48 \end{cases}.$$

Simplificant:

$$\begin{cases} v = \frac{3u^2 - 9u + 8}{u} \\ u^3 - 6u^2 + 12u - 8 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} v = \frac{3u^2 - 9u + 8}{u} \\ (u-2)^3 = 0 \end{cases}.$$

Resolent el sistema: $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$.

Aleshores: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1, \text{ Per tant,} \\ c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 1 \end{cases}$

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, i siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. Si D és el peu de la perpendicular de A sobre $\overline{CM}$ i N el punt mig del segment $\overline{DC}$, demostreu que $\overline{BD}$ i $\overline{AN}$ són perpendiculars.

Crux Mathematicorum M308

Solució:

$\overline{AM} = \frac{c}{2}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle CAM$:

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}.$$

Els triangles $\triangle CAM$, $\triangle ADM$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{2\overline{CM}} = \frac{2\overline{DM}}{c}. \text{ Aleshores, } \overline{DM} = \frac{c^2 \sqrt{4b^2 + c^2}}{2(4b^2 + c^2)}.$$

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DM}} = \frac{b}{\overline{CM}}. \text{ Aleshores, } \overline{DP} = \frac{bc^2}{4b^2 + c^2}.$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DM}} = \frac{2b}{c}. \text{ Aleshores, } \overline{AD} = \frac{bc \sqrt{4b^2 + c^2}}{4b^2 + c^2}.$$

Siga P la projecció del punt D sobre el catet $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció del punt N sobre el catet $\overline{AB}$.

Els triangles $\triangle APD$, $\triangle DPM$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DM}}. \text{ Aleshores, } \overline{AP} = \frac{2b^2 c}{4b^2 + c^2}.$$

Per ser $\overline{PD}$ i $\overline{QN}$ paral·leles. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}, \text{ aleshores, } \overline{AQ} = \frac{b^2 c}{4b^2 + c^2}.$$

$$\overline{CD} = \overline{CM} - \overline{DM} = \frac{2b^2 \sqrt{4b^2 + c^2}}{4b^2 + c^2}.$$

$$\overline{DN} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{b^2 \sqrt{4b^2 + c^2}}{4b^2 + c^2}.$$

$$\overline{MN} = \overline{DM} - \overline{DN} = \frac{\sqrt{4b^2 + c^2}}{2(4b^2 + c^2)} (2b^2 + c^2).$$

Els triangles $\triangle CAM$, $\triangle NQM$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

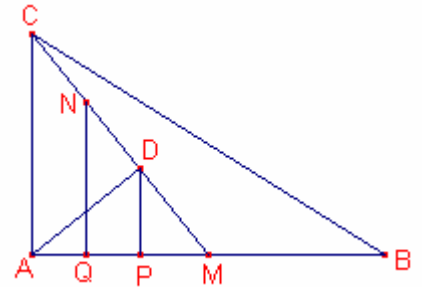
$$\frac{\overline{QN}}{\overline{MN}} = \frac{b}{\overline{CM}}, \text{ aleshores, } \overline{QN} = \frac{b(b^2 + c^2)}{4b^2 + c^2}.$$

$$\overline{BP} = c - \overline{AP} = \frac{c(2b^2 + c^2)}{4b^2 + c^2}.$$

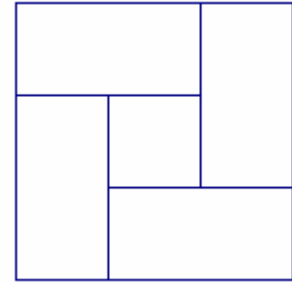
Siga $\alpha = \angle DBA$, $\beta = \angle NAQ$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = \frac{bc}{2b^2 + c^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = \frac{bc}{2b^2 + c^2}.$$

Aleshores el angles α, β són complementaris. Per tant, $\overline{BD}$ i $\overline{AN}$ són perpendiculars.



Quatre rectangles iguals estan disposats formant una quadrat de tal forma que estan sobre un altre quadrat més menut. Siga S l'àrea del quadrat exterior i Q l'àrea del quadrat interior. Si l'àrea del quadrat exterior és 9 vegades l'àrea del quadrat interior, determineu la raó dels costats dels rectangles.
Crux Mathematicorum M310



Solució:

Si les àrees dels quadrats estan en proporció 9:1 la proporció dels costats és $\sqrt{9} : 1$
Siguen els costats dels 4 rectangles a , b tal que $a \leq b$.

El costat del quadrat gran és $a + b$.
El costat del quadrat menut és $b - a$.

$$\frac{a + b}{b - a} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3.$$

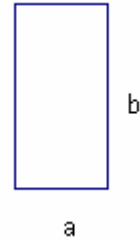
Aleshores,

$$a + b = 3b - 3a$$

$$4a = 2b$$

$$\frac{b}{a} = 2.$$

Aleshores la raó de proporcionalitat entre els costats dels rectangles és 1: 2



En el triangle $\triangle ABC$, siga D el punt d'intersecció de $\overline{AB}$ amb la bisectriu interior de l'angle C, i siga E el punt mig de $\overline{AB}$. Demostreu que $\overline{CD} + \overline{CE} < \overline{BC} + \overline{AC}$.
Crux Mathematicorum M315

Solució:

Siga E el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga $\overline{CD}$ la bisectriu del triangle $\triangle ABC$.

Siga $\overline{CH}$ altura del triangle $\triangle ABC$

Considerem el punt C' simètric de C respecte del punt mig E.

$$\overline{CE} = \overline{C'E}$$

$AC'BC$ és un paral·lelogram.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle AC'B$:

$$\overline{CC'} < \overline{BC} + \overline{AC}. \text{ Aleshores: } \overline{CE} < \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{2}.$$

Suposem que $A \geq B$.

El peu de l'altura H està en la semirecta d'origen E i direcció $\overrightarrow{EA}$.

La bisectriu referida a un vèrtex del triangle està entre l'altura i la mitjana referida al mateix vèrtex.

El segment $\overline{CD}$ està dins del triangle rectangle $\triangle CHE$.

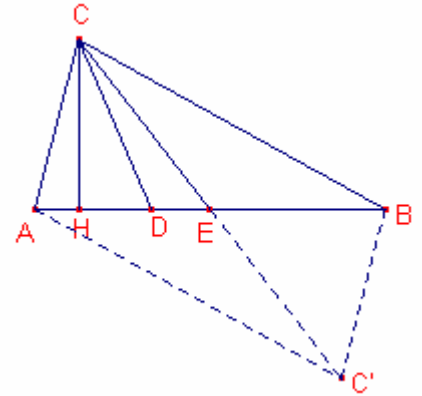
$$\angle CDB = 90^\circ + \angle HCD \geq 90^\circ.$$

Considerem el triangle $\triangle CDE$. A angle major li correspon costat oposat major.

$$\text{Aleshores: } \overline{CD} \leq \overline{CE}. \quad \overline{CD} \leq \overline{CE} < \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{2}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{CD} + \overline{CE} < \overline{BC} + \overline{AC}.$$

Si $A \leq B$, el raonament seria anàleg.



Calculeu $\sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$.

Crux Mathematicorum M316

Solució:

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k}}{(k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k})(k\sqrt{k+1} - (k+1)\sqrt{k})} = \frac{-k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}{(k+1)k}$$

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$$

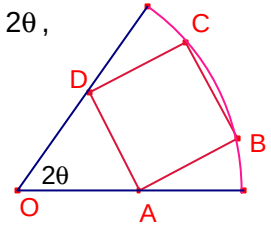
$$\sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \sum_{1 \leq k \leq 99} \left(\frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1} \right) = \sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{\sqrt{k}}{k} - \sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{\sqrt{k+1}}{k+1} =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq 99} \frac{\sqrt{k}}{k} - \sum_{2 \leq k \leq 100} \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{100}}{100} = \frac{9}{10}$$

Siga el quadrat ABCD inscrit en un sector circular de radi 1 que té dos vèrtexs en l'arc i dos sobre els radis frontera (veure figura). Si l'angle central mesura 2θ , determineu el valor θ que fa l'àrea del quadrat màxima.

Crux Mathematicorum M317

Solució:



Siga $x = \overline{AB} = \overline{AD}$ el costat del quadrat.

L'àrea del quadrat és $S = x^2$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.

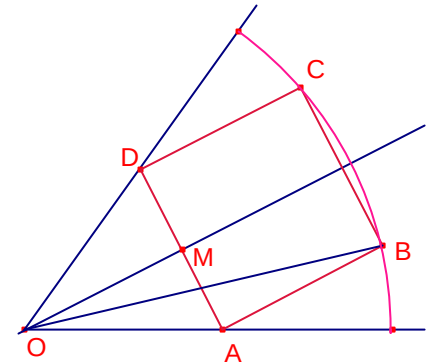
$0 \leq 2\theta \leq \pi$, aleshores, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\angle OAD = \frac{180^\circ - 2\theta}{2} = 90^\circ - \theta.$$

$$\angle OAB = 180^\circ - \theta.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OMA$:

$$\overline{OA} = \frac{x}{2 \sin \theta}.$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OAB$:

$$1^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2 \sin \theta} \right)^2 - 2x \frac{x}{2 \sin \theta} \cos(180^\circ - \theta).$$

$$x^2 = \frac{4 \sin^2 \theta}{4 \sin^2 + 4 \sin \theta \cdot \cos \theta + 1}.$$

Considerem la funció:

$$f(\theta) = \frac{4 \sin^2 \theta}{4 \sin^2 + 4 \sin \theta \cdot \cos \theta + 1}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$f'(\theta) = \frac{8 \sin \theta (\cos \theta + 2 \sin \theta)}{(4 \sin^2 + 4 \sin \theta \cdot \cos \theta + 1)^2}$$

$f'(\theta) > 0$, $\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. Aleshores la funció és creixent en el domini.

El màxim s'assoleix quan $\theta = \frac{\pi}{2}$, és a dir, quan el sector és la semicircumferència.

Si h i a són la hipotenusa i l'altura, respectivament, d'un triangle rectangle, proveu que

$$\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \geq \frac{5}{2}.$$

Crux Mathematicorum M319

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle HBC$ $\angle H = 90^\circ$, siga $a = \overline{HD}$ altura sobre la hipotenusa del triangle.

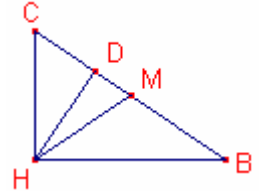
Siga $\overline{HM}$ la mitjana sobre la hipotenusa.

La mitjana sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura la meitat

de la hipotenusa, $\overline{HM} = \frac{h}{2}$.

$\overline{HD} \leq \overline{HM}$, la igualtat s'assoleix quan el triangle rectangle és isòsceles.

Aleshores, $0 < \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2}$.



Considerem la funció: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. La funció és contínua i derivable en $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}. \quad f'(x) < 0 \quad \text{quan} \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right].$$

Aleshores, La funció és decreixent en $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Per tant, $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$.

Siga $x = \frac{a}{h}$, aleshores, $f\left(\frac{a}{h}\right) \geq \frac{5}{2}$. Aleshores, $\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \geq \frac{5}{2}$.

La igualtat s'assoleix quan $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$ ja que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$, és a dir quan el triangle rectangle és isòsceles.

Si p i q són dos nombres primers bessons, aleshores els nombres $p^4 + 4$ i $q^4 + 4$ són primers entre ells.

Crux Mathematicorum M320

Solució:

Dos nombres són bessons si es diferencien en 2 unitats, és a dir, $q = p + 2$.

$$p^4 + 4 = (p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 2).$$

$$\begin{aligned} q^4 + 4 &= (q^2 + 2q + 2)(q^2 - 2q + 2) = ((p + 2)^2 + 2(p + 2) + 2)((p + 2)^2 - 2(p + 2) + 2) = \\ &= (p^2 + 6p + 10)(p^2 + 2p + 2). \end{aligned}$$

Aleshores, $p^2 + 2p + 2 \neq 1$ divideix $p^4 + 4$ i $q^4 + 4$, per tant no són primers entre ells.

Siguen a, b, c tres nombres reals positius. Demostreu que:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Crux Mathematicorum M322

Solució:

$$a^3 \geq 0, b^3 \geq 0, c^3 \geq 0.$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = abc.$$

$$\text{Per tant, } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} \geq 1.$$

$$a > 0, b > 0.$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > 0.$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} > 0, \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca} > 0.$$

Multiplicant les tres desigualtats:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq abc$$

Determineu les solucions reals (x,y) de l'equació

$$20 \sin x - 21 \cos x = 81y^2 - 18y + 30.$$

Crux Mathematicorum M323

Solució:

Considerem la funció $f(y) = 81y^2 - 18y + 30$.

La funció és una paràbola el seu valor mínim és el vèrtex, que es troba en

$$y = \frac{18}{2 \cdot 81} = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Aleshores, } f(y) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = 29.$$

Considerem la funció $g(x) = 20 \sin x - 21 \cos x$.

Determinem els màxims de la funció:

$$g'(x) = 20 \cos x + 21 \sin x.$$

$$g'(x) = 0$$

$$20 \cos x + 21 \sin x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-20}{21}.$$

$$x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{-20}{21}\right) = \frac{-20}{29}, \quad \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{-20}{21}\right) = \frac{21}{29}$$

$$g''(x) = -20 \sin x + 21 \cos x$$

$$g''\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + 2k\pi\right) = -20 \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right)\right) + 21 \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right)\right) > 0$$

Aleshores, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + 2k\pi$ és un mínim.

$$g''\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi\right) = -20 \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi\right) + 21 \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi\right) < 0$$

Aleshores, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi$ és un màxim.

$$g\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi\right) = 29$$

Per tant, $g(x) \leq 29$.

L'equació $20 \sin x - 21 \cos x = 81y^2 - 18y + 30$ té solució quan $g(x) = 29$, $f(y) = 29$.

$$\text{És a dir, } x = \operatorname{arctg}\left(\frac{-20}{21}\right) + \pi + 2k\pi, \quad y = \frac{1}{9}$$

Dues funcions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ són definides per

$$f(x) = 3x - 1 + |2x + 1|, \quad g(x) = \frac{1}{5}(3x + 5 - |2x + 5|). \text{ Demostreu que } g \circ f = f \circ g,$$

$$(f \circ f)^{-1} = g \circ g.$$

Crux Mathematicorum M324

Solució:

Definim les funcions f i g a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < \frac{-1}{2} \\ 5x & \text{si } x \geq \frac{-1}{2} \end{cases}, \text{ la funció és contínua en } x = \frac{-1}{2}.$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{5}x & \text{si } x \geq \frac{-5}{2} \end{cases}, \text{ la funció és contínua en } x = \frac{-5}{2}.$$

a) Vegem que $g \circ f = f \circ g$.

$$\text{Si } x < \frac{-5}{2}. \text{ Aleshores, } x - 2 < \frac{-5}{2}, \quad x + 2 < \frac{-1}{2}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = x.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = x$$

$$\text{Si } x = \frac{-5}{2}$$

$$(g \circ f)\left(\frac{-5}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{-5}{2}\right)\right) = g\left(\frac{-9}{2}\right) = \frac{-5}{2}.$$

$$(f \circ g)\left(\frac{-5}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{-5}{2}\right)\right) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-5}{2}.$$

$$\text{Si } \frac{-5}{2} < x < \frac{-1}{2}. \text{ Aleshores, } x - 2 < \frac{-5}{2}, \quad \frac{-1}{2} < \frac{x}{5}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = x.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{5}x\right) = x.$$

$$\text{Si } x = \frac{-1}{2}$$

$$(g \circ f)\left(\frac{-1}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = g\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-1}{2}.$$

$$(f \circ g)\left(\frac{-1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Si } x > \frac{-1}{2}. \text{ Aleshores, } 5x > \frac{-5}{2}, \quad \frac{1}{5}x > \frac{-1}{10} > \frac{-1}{2}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x) = \frac{1}{5}5x = x.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{5}x\right) = 5\frac{1}{5}x = x.$$

$$\text{Aleshores, } (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x.$$

b) Vegem que $(f \circ f)^{-1} = g \circ g$.

Aplicant l'apartat a)

$$((f \circ f) \circ (g \circ g))(x) = f((f \circ g)(g(x))) = f(g(x)) = x$$

Aleshores, $(f \circ f)^{-1} = g \circ g$.

Siga el nombre en base 10, $a89b_{(10)}$, determineu a i b a fi

que $a89b_{(10)} - 5904_{(10)} = b98a_{(10)}$.

Crux Mathematicorum M326

Solució:

$$0 < a, b \leq 9$$

$$a89b_{(10)} - 5904_{(10)} = b98a_{(10)}.$$

$$a \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + b - 5904 = b \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + a.$$

$$1000(a - b) + b - c = 980 + 5904 - 890$$

$$999(a - b) = 5994. \text{ Simplificant:}$$

$$a - b = 6.$$

Per tant els parells de valors (a,b) són:

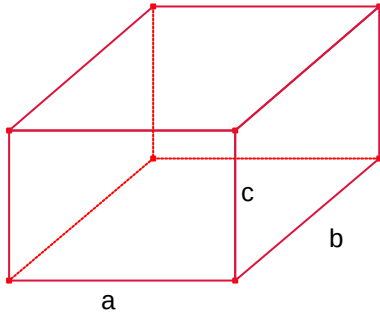
$(7,1), (8,2), (9,3)$.

Catherine s'ha comprat una nova goma d'esborrar en forma de prisma rectangular, les diagonals de les cares mesuren 10, $\sqrt{61}$ i $\sqrt{89}$. Quin és el volum de la goma de Catherine?

Crux Mathematicorum M327

Solució:

Siguen a, b, c las arestes del prisma rectangular.



Siguen a, b les arestes de la cara de diagonal 10. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$a^2 + b^2 = 10^2 \quad (1)$$

Siguen a, c les arestes de la cara de diagonal $\sqrt{61}$. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$a^2 + c^2 = (\sqrt{61})^2 \quad (2)$$

Siguen b, c les arestes de la cara de diagonal $\sqrt{89}$. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$b^2 + c^2 = (\sqrt{89})^2 \quad (3)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1), (2), (3):

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ a^2 + c^2 = 61 \\ b^2 + c^2 = 89 \end{cases} \quad \text{resolent el sistema en les incògnites } a^2, b^2, c^2:$$

$$\begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 64 \\ c^2 = 25 \end{cases} \quad \text{Resolent las tres equacions: } \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ c = 5 \end{cases}$$

El volum de la goma és $V = 5 \cdot 6 \cdot 8 = 240u^3$.

Demostreu que per a qualsevol nombre enter positiu li restem la suma de cadascuna de les seues xifres elevades a una potència imparella qualsevol (no necessàriament la mateixa), s'obté un múltiple de 3.

Crux Mathematicorum M328.

Solució:

Ho provarem per inducció.

Suposem que el nombre a té una xifra.

Siga $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ un nombre imparell.

$$P = a - a^{2k+1} = a(1 - a^{2k}) = a(1 + a^k)(1 - a^k)$$

Suposem que $k = 3r$, aplicant el teorema de Fermat:

$$a^k = (a^3)^r \equiv 1^r \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}, \text{ aleshores,}$$

$$P = a(1 + a^k)(1 - a^k) \equiv a(1+1)(1-1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}.$$

Suposem que $k = 3r + 1$, aplicant el teorema de Fermat:

$$a^k = (a^3)^r a \equiv 1^r a \pmod{3} \equiv a \pmod{3}, \text{ aleshores,}$$

$$P = a(1 + a^k)(1 - a^k) \equiv a(a+1)(a-1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}. \text{ (producte de 3 nombres naturals consecutius és múltiple de 3.)}$$

Suposem que $k = 3r$, aplicant el teorema de Fermat:

$$a^k = (a^3)^r a^2 \equiv 1^r \cdot a \pmod{3} \equiv a \pmod{3}, \text{ aleshores,}$$

$$P = a(1 + a^k)(1 - a^k) \equiv a(a+1)(a-1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}. \text{ (producte de 3 nombres naturals consecutius és múltiple de 3.)}$$

Per tant P és múltiple de 3.

Suposem que per a qualsevol nombre enter de n xifres s'acompleix la propietat:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}$$

$$\text{aleshores, } a - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} \right) \equiv 0 \pmod{3}$$

Vegem que s'acompleix la propietat per a qualsevol nombre natural de $n+1$ xifres:

$$\text{Siga } a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n.$$

$$\begin{aligned} a - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} + (a_n)^{2k_n+1} \right) &= \\ = a_0 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} + (a_n)^{2k_n+1} \right) &= \\ = a_0 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} \right) + a_n 10^n - (a_n)^{2k_n+1} &\equiv \end{aligned}$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$\equiv 0 + a_n 10^n - (a_n)^{2k_n+1} \pmod{3} \equiv$$

$$\text{Notem que } 10^n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\equiv a_n - (a_n)^{2k_n+1} \pmod{3} \equiv$$

Un nombre d'una xifra compleix la propietat aleshores:

$$\equiv 0 \pmod{3}.$$

Determineu el valor de $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ + \cos^2 90^\circ$.

Crux Mathematicorum M329

Solució:

Siga $M = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ + \cos^2 90^\circ$

Aplicant raons trigonomètriques d'angles complementaris $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$:

$M = \sin^2 89^\circ + \sin^2 88^\circ + \sin^2 87^\circ + \dots + \sin^2 1^\circ + \sin^2 0^\circ$.

Sumant les dues expressions:

$2M = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ) + \cos^2 90^\circ + \sin^2 0^\circ$

$2M = 89$.

Aleshores:

$$M = \frac{89}{2}.$$

Siga n un enter positiu. Es defineix el n nombre triangular T_n com la suma

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} . \text{ Determineu tots els parells de nombres triangulars}$$

tal que la diferència siga 2008.

Crux Mathematicorum M330

Solució:

Siga $k > n$

Cerquem els parells, (n, k) tal que $T_k - T_n = 2008$.

$$\frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 2008 .$$

$$k^2 + k - n^2 - n = 4016 .$$

$$(k+n)(k-n) + k - n = 4016 .$$

$$(k+n+1)(k-n) = 2^4 \cdot 251 .$$

Les possibles solucions són les solucions naturals dels següents sistemes:

$$\begin{cases} k+n+1 = 251 \\ k-n = 16 \end{cases} , \text{ la solució és: } \begin{cases} n = 117 \\ k = 133 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 502 \\ k-n = 8 \end{cases} , \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{493}{2} \\ k = \frac{509}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 1004 \\ k-n = 4 \end{cases} , \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{999}{2} \\ k = \frac{1007}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 2008 \\ k-n = 2 \end{cases} , \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{2005}{2} \\ k = \frac{2009}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 4016 \\ k-n = 1 \end{cases} , \text{ la solució és: } \begin{cases} n = 2007 \\ k = 2008 \end{cases} .$$

$$\text{Per tant, només té 2 solucions, } \begin{cases} n = 117 \\ k = 133 \end{cases} , \begin{cases} n = 2007 \\ k = 2008 \end{cases} .$$

Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ i les diagonals es tallen en el punt P.

a) Si l'àrea del triangle $\triangle APB$ és 4 i la del triangle $\triangle DPC$ és 9,

(i) Demostreu que $\overline{AP} : \overline{PC} = 2 : 3$.

(ii) Expliqueu per què la raó de les superfícies dels triangles $\triangle BPC$ i $\triangle BPA$ és igual a 3:2

(iii) Determineu l'àrea del trapezi ABCD.

b) Si l'àrea del triangle $\triangle APB$ és x i la del triangle $\triangle DPC$ és y, determineu l'àrea del trapezi ABCD en funció de x i y.

Crux Mathematicorum M331

Solució:

a)

(i)

Els triangles $\triangle APB$, $\triangle DPC$ són semblants, la raó de proporcionalitat és igual a l'arrel quadrada de la proporció de les àrees.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \sqrt{\frac{S_{APB}}{S_{DPC}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

(ii)

Dos triangles que tenen la mateixa altura la bases són proporcionals a les àrees.

Els triangles $\triangle BPC$, $\triangle BPA$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{3}{2}.$$

Anàlogament:

$$\frac{S_{DPC}}{S_{DPA}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{3}{2}.$$

(iii)

$$S_{BPC} = \frac{3}{2} S_{APB} = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

$$S_{DPA} = \frac{2}{3} S_{DPC} = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6.$$

$$S_{ABCD} = S_{DPC} + S_{APB} + S_{BPC} + S_{DPA} = 9 + 4 + 6 + 6 = 25.$$

b)

Siga $x = S_{APB}$, $y = S_{DPC}$.

Anàlogament que en l'apartat (aii)

$$\frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{S_{DPC}}{S_{DPA}} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$S_{BPC} = \sqrt{\frac{y}{x}} S_{APB} = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot x = \sqrt{xy}.$$

$$S_{DPA} = \sqrt{\frac{x}{y}} S_{DPC} = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot y = \sqrt{xy}.$$

Aleshores:

$$S_{ABCD} = S_{DPC} + S_{APB} + S_{BPC} + S_{DPA} = y + x + \sqrt{xy} + \sqrt{xy} = x + y + 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

El radi i l'altura d'un cilindre circular, recte i tancat són dos nombres naturals. El valor del seu volum és quatre vegades el de la superfície total (bases incloses). Determineu les dimensions del cilindre de volum mínim.

Crux Mathematicorum M332.

Solució:

Siga R el radi del cilindre i h l'altura, $R, h \in \mathbb{N}$.

El volum del cilindre és $V = \pi R^2 h$.

La superfície del cilindre és $S = 2\pi R h + 2(\pi R^2)$.

Com que el valor del seu volum és quatre vegades el de la superfície total:

$\pi R^2 h = 4(2\pi R h + 2\pi R^2)$. Simplificant:

$$R h = 8 h + 8 R.$$

$$h = \frac{8R}{R-8}.$$

Aleshores la funció volum és:

$$V(R) = 8\pi \frac{R^3}{R-8}.$$

$$V'(R) = 8\pi \frac{2R^3 - 24R^2}{(R-8)^2}.$$

$$V'(R) = 0 \text{ si } R = 12 \in \mathbb{N}, \quad h = \frac{8R}{R-8} = \frac{8 \cdot 12}{12-8} = 24 \in \mathbb{N}.$$

$$V''(12) > 0.$$

Aleshores, $R = 12$ és un mínim de la funció.

Aleshores les dimensions del cilindre de volum mínim són $R = 12$, $h = 24$.

- a) Determineu tots els enters x per als quals $\frac{x-3}{3x-2}$ és un enter.
- b) Determineu tots els enters y per als quals $\frac{3y^3+3}{3y^2+y-2}$ és un enter.

Crux Mathematicorum M334

Solució:

a)

Considerem la funció $f(x) = \frac{x-3}{3x-2}$. El domini de la funció és $\mathbb{R} \sim \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

La funció és estrictament creixent en $\mathbb{R} \sim \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$f(3) = 0.$$

$$f(-1) = \frac{4}{5}.$$

Aleshores:

Si $x > 3$, $0 < f(x) < \frac{1}{3}$, és a dir, $f(x) \notin \mathbb{Z}$.

Si $x \leq -1$, $\frac{1}{3} < f(x) \leq \frac{4}{5}$, és a dir, $f(x) \notin \mathbb{Z}$.

Si $x = 0$, $f(0) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Si $x = 1$, $f(1) = -2 \in \mathbb{Z}$.

Si $x = 2$, $f(2) = \frac{-1}{4} \notin \mathbb{Z}$.

Si $x = 3$, $f(3) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Per tant, $\frac{x-3}{3x-2}$ és enter si $x = 1, 3$.

b)

$$3y^3 + 3 = (y+1)(3y^2 - 3y + 3)$$

$$3y^2 + y - 2 = (y+1)(3y - 2)$$

Suposem $y \neq -1$, en cas contrari el denominador de $\frac{3y^3+3}{3y^2+y-2}$ és zero.

$$\frac{3y^3+3}{3y^2+y-2} = \frac{3y^2-3y+3}{3y-2} = y + \frac{-y+3}{3y-2} = y - \frac{y-3}{3y-2}$$

$y \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{3y^3+3}{3y^2+y-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - \frac{y-3}{3y-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y-3}{3y-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = 1, 3 \text{ (aplicant l'apartat a)}$$

Per tant $\frac{3y^3+3}{3y^2+y-2}$ és un enter si $y = 1, 3$.

En una successió de quatre nombres, el segon es el doble del primer. A més a més, la suma del primer i del quart és 9, la suma del segon i del tercer és 7, i la suma dels quadrats dels quatre nombres és 78. Determineu totes les successions que tenen aquesta propietat.

Crux Mathematicorum M335

Solució:

Siguen els termes de la successió:

a, 2a, b, c

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ 2a + b = 7 \\ a^2 + (2a)^2 + b^2 + c^2 = 78 \end{cases} . \text{ Les solucions del sistema són:}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 7 \end{cases}, \begin{cases} a = \frac{13}{5} \\ b = \frac{9}{5} \\ c = \frac{32}{5} \end{cases} . \text{ Les dues successions que compleixen les hipòtesis són:}$$

2, 4, 3, 7 .

$\frac{13}{5}, \frac{26}{5}, \frac{9}{5}, \frac{32}{5}$

Un punt “reseau” és un punt (x,y) del plànol tal que les coordenades x, y són enteres.
Siga n un enter positiu.

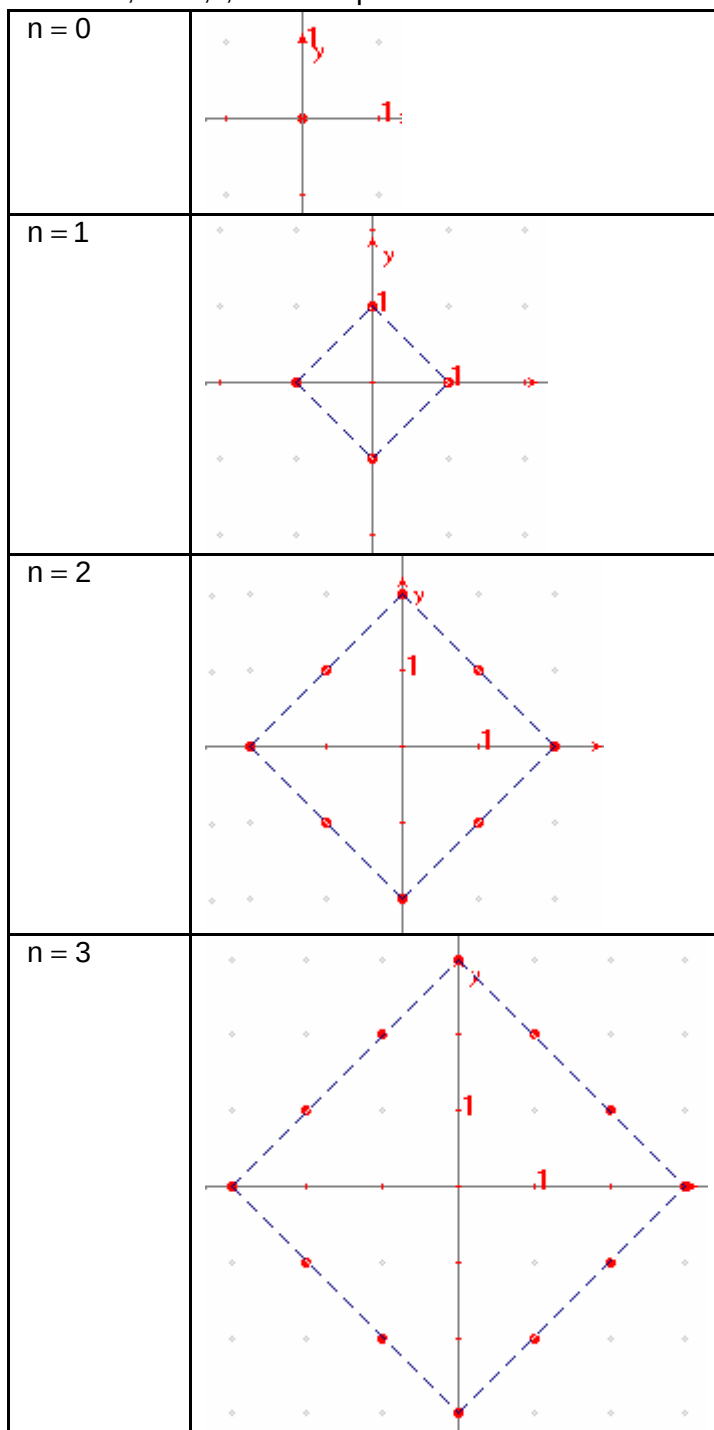
Determineu els punts “reseau” tals que estan a l'interior de la regió $|x| + |y| \leq n$.

Crux Mathematicorum M336.

Solució:

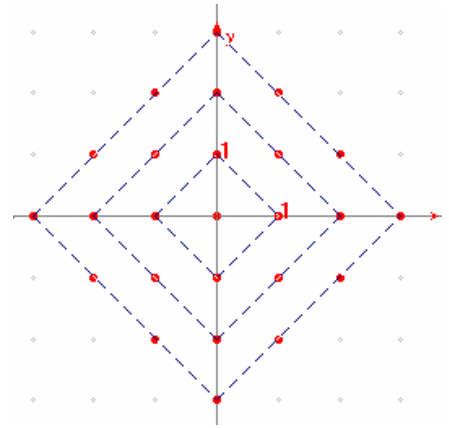
$|x| + |y| = 0$ l'únic punt que ho compleix és $(0,0)$

El total dels punts que $|x| + |y| = n$, $n = 1, 2, \dots$ és igual al perímetre d'un quadrat de costat n , $n = 1, 2, \dots$ el seu perímetre és $4n$.



El total de punts tal que $|x| + |y| \leq n$ és la suma:

$$1 + \sum_{k=1}^n 4k = 1 + 4 \sum_{k=1}^n k = 1 + 4 \cdot \frac{(1+n)n}{2} = 1 + 2n(n+1).$$



Sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ d'un rectangle ABCD amb $\overline{AD} < \overline{AB}$ s'ha escollit els punts F i E tal que AFCE formen un rombe.

a) Si $\overline{AB} = 16$ i $\overline{BC} = 12$, determineu $\overline{EF}$.

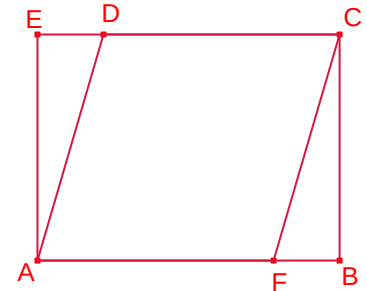
b) Si $\overline{AB} = x$ i $\overline{BC} = y$, determineu $\overline{EF}$ en funció de x i y.

Crux Mathematicorum M337.

Solució:

Les diagonals d'un rombe són perpendiculars i divideixen el rombe en 4 triangles rectangles iguals.

Siga $c = \overline{AF} = \overline{FC} = \overline{CE} = \overline{EA}$ costat del rombe.



a)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle FBC$:

$$c^2 = 12^2 + (16 - c)^2. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$c = \frac{25}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$\overline{AC} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

L'àrea del rombe és:

$$S_{AFCE} = \overline{AF} \cdot \overline{BC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{EF}}{2};$$

$$\frac{25}{2} \cdot 12 = \frac{20 \cdot \overline{EF}}{2}. \text{ Resolent l'equació en } \overline{EF}:$$

$$\overline{EF} = 15.$$

b) Utilitzant el mateix procediment de l'apartat a):

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle FBC$:

$$c^2 = y^2 + (16 - x)^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita c:}$$

$$c = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$:

$$\overline{AC} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$S_{AFCE} = \overline{AF} \cdot \overline{BC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{EF}}{2};$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2x} y = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \overline{EF}}{2}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } \overline{EF}:$$

$$\overline{EF} = \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dos estudiants fan un error copiant l'equació quadràtica $x^2 + bx + c = 0$ que el seu professor ha escrit a la pissarra. Joan ha escrit b correctament, però no c , aleshores la seua equació té per arrels 5 i 4. Víctor escriu c correctament, però no b , la seua equació té per arrels 2 i 4. Quines són les solucions de l'equació original.
Crux Mathematicorum M338

Solució:

Siga $x^2 + bx + d = 0$ l'equació que ha copiat Joan. Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$b = -(4 + 5).$$

$$b = -9.$$

Siga $x^2 + ex + c = 0$ l'equació que ha copiat Víctor. Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$c = 2 \cdot 4.$$

$$c = 8.$$

L'equació original és:

$$x^2 - 9x + 8 = 0, \text{ les arrels d'aquesta l'equació són:}$$

$$x = 8, x = 1.$$

Determineu el nombre d'enters entre 100 i 199, ambdós inclosos, que tenen exactament dos xifres iguals.

- a) S'escull un enter entre 1 i 999 a l'atzar (cada enter té la mateixa probabilitat d'eixir). Quin és la probabilitat que l'enter escollit tinga exactament dues xifres iguals.

Crux Mathematicorum M339

Solució:

a)

La forma dels nombres és:

$1aa_{(10)}$, de tal manera que $a \neq 1$. Per tant, hi ha 9 possibilitats.

$11a_{(10)}$, de tal manera que $a \neq 1$. Per tant, hi ha 9 possibilitats.

$1a1_{(10)}$, de tal manera que $a \neq 1$. Per tant, hi ha 9 possibilitats.

Per tant, entre 100 i 199 hi ha 27 possibilitats.

b)

Entre 1 i 9 els nombres són d'una xifra.

Entre 10 i 99, hi ha 9 possibilitats que tinguin dues xifres iguals.

Entre 100 i 999, aplicant a) hi ha $9 \cdot 27$ possibilitats de que el nombre tinga dues xifres exactament iguals.

La probabilitat del problema és:

$$p = \frac{9 + 9 \cdot 27}{999} = \frac{28}{111}.$$

Siga $\triangle ABC$ un triangle isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$, siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga P un punt qualsevol del segment $\overline{BM}$. Pel punt P es traça la perpendicular al costat $\overline{BC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en K i a la recta AC en T. Demostreu que $\overline{PK} + \overline{PT}$ és constant.
Crux Mathematicorum M340

Solució:

Siga $\overline{BC} = 2x$, aleshores, $\overline{BM} = \overline{CM} = x$.

Siga $\overline{BP} = y$.

Els triangles $\triangle ABM$, $\triangle KBP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}, \quad \frac{\overline{PK}}{\overline{AM}} = \frac{y}{x}. \text{ Aleshores:}$$

$$\overline{PK} = \frac{y}{x} \cdot \overline{AM}.$$

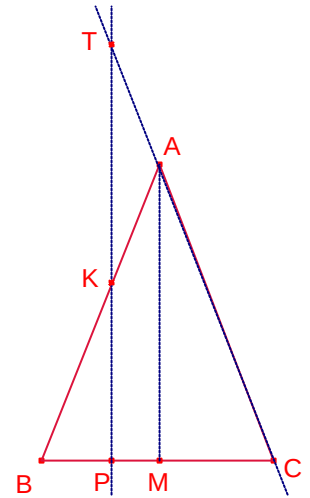
Els triangles $\triangle ACM$, $\triangle TCP$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}}, \quad \frac{\overline{PT}}{\overline{AM}} = \frac{2x - y}{x}. \text{ Aleshores:}$$

$$\overline{PT} = \frac{2x - y}{x} \cdot \overline{AM}.$$

$$\overline{PK} + \overline{PT} = \frac{y}{x} \cdot \overline{AM} + \frac{2x - y}{x} \cdot \overline{AM} = 2 \cdot \overline{AM}.$$

Aleshores, $\overline{PK} + \overline{PT}$ és constant i és igual al doble de l'altura del triangle isòsceles sobre el costat desigual.



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$. Els catets $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ estan en proporció 3:2.
L'altura $\overline{BD}$ divideix la hipotenusa $\overline{CA}$ en dues parts, tal que la seua diferència és 10.
Calculeu la longitud de la hipotenusa $\overline{CA}$.
Crux Mathematicorum M341

Solució:

Siga $\overline{BD} = h$.

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{3}{2}. \text{ Aleshores, } \overline{AD} = \frac{3}{2}h.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle BDC$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

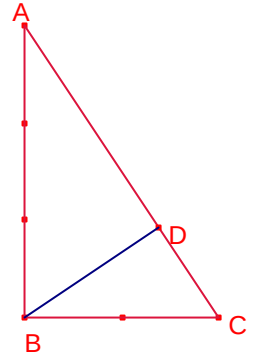
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{2}{3}. \text{ Aleshores, } \overline{CD} = \frac{2}{3}h.$$

Per hipòtesi, $\overline{AD} - \overline{CD} = 10$.

Aleshores, $\frac{3}{2}h - \frac{2}{3}h = 10$. Resolent l'equació:

$h = 12$.

$$\overline{CA} = \overline{CD} + \overline{AD} = \frac{2}{3}h + \frac{3}{2}h = 26.$$



Sophie i Céline han de desplaçar unes caixes, 10 grans i 10 menudes. En la taula s'indica el temps requerit per fer-ho, per cada caixa i persona.

	Céline	Sophie
Caixa menuda	1min.	3min.
Caixa gran	6min.	5min.

Crux Mathematicorum M342

El treball comença a les 9h del matí. Determineu a quina hora, en temps en què hauran fet la feina.

Solució:

Siga t_1 = el temps en min. que tarden Céline i Sophie juntes en transportar 1 caixa gran:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{t_1}, \text{ aleshores,}$$

$$t_1 = \frac{30}{11} \text{ min.}$$

Per transportar les 10 caixes grans tardarien:

$$T_1 = 10 \cdot t_1 = \frac{300}{11} \text{ min.}$$

Siga t_2 = el temps en min. que tarden Céline i Sophie juntes en transportar 1 caixa menuda:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{t_2}, \text{ aleshores,}$$

$$t_2 = \frac{3}{4} \text{ min.}$$

Per transportar les 10 caixes menudes tardarien:

$$T_2 = 10 \cdot t_2 = \frac{30}{4} \text{ min.}$$

El temps total que tardarien és:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{300}{11} + \frac{30}{4} \text{ min.} = \frac{765}{2} \text{ min} = 34 \text{ min } 46 \text{ seg.}$$

Per tant acabarien la feina a 9h34m46seg.

Siga la successió recurrent de Fibonacci:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

Alguns termes de la successió són: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,....

Calculeu la suma dels 100 primers nombres parells d'aquesta llista.

Crux Mathematicorum M343

Solució:

El polinomi característic de la successió recurrent és:

$$x^2 = x + 1.$$

Les arrels del polinomi són:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1}{\Phi}.$$

Aleshores el terme general de la successió és:

$$f_n = A \cdot \Phi^n + B \cdot \left(\frac{-1}{\Phi}\right)^n$$

Amb el primer i segon terme determinem els valors de A, B:

$$\begin{cases} 1 = \Phi \cdot A - \frac{1}{\Phi} \cdot B \\ 1 = \Phi^2 \cdot A + \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 \cdot B \end{cases}, \text{ la solució del qual és: } \begin{cases} A = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ B = \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \Phi^n + \frac{-\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{-1}{\Phi}\right)^n$$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \Phi^n + \frac{-\sqrt{5}}{5} \cdot (1-\Phi)^n$$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (\Phi^n - (1-\Phi)^n) \quad (1)$$

Calculem la suma dels n termes de la successió de Fibonacci:

$$\text{Siga } T_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

$$f_3 = f_1 + f_2$$

$$f_4 = f_2 + f_3$$

$$f_5 = f_3 + f_4$$

.....

.....

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

Sumant totes les expressions:

$$T_n - f_1 - f_2 = 2T_n - f_{n-1} - 2 \cdot f_n - f_1, \text{ aleshores:}$$

$$T_n = 2f_n + f_{n-1} - f_2 \quad (2)$$

Notem que els termes de valor parell ocupen els llocs múltiples de 3:

$$\text{Siga } S \text{ la suma que cerquem, } S = \sum_{k=1}^{100} f_{3k}$$

$$2 \cdot f_3 = f_1 + f_2 + f_3 .$$

$$2 \cdot f_{2:3} = f_4 + f_5 + f_6$$

$$2 \cdot f_{3:3} = f_7 + f_8 + f_9$$

.....

.....

$$2 \cdot f_{100:3} = f_{298} + f_{299} + f_{300}$$

Sumant totes les expressions:

$$2S = \sum_{k=1}^{3:100} f_k = T_{300}$$

Aplicant la fórmula (2)

$$S = \frac{1}{2} T_{300} = \frac{1}{2} (2f_{300} + f_{299} - f_2)$$

Aplicant la fórmula (1):

$$S = \frac{1}{2} T_{300} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi^{300} - (1-\Phi)^{300}) + \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi^{299} - (1-\Phi)^{299}) - \frac{\sqrt{5}}{5} (\Phi^2 - (1-\Phi)^2) \right)$$

S'ha construït el quadrat

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Format pels nombres de 1 a 9 en ordre creixent, línia a línia. La suma dels enters que formen les diagonals és 15. Si construïm un quadrat semblant amb els enters de 1 a 10000, quina serà la suma de cadascuna de les diagonals.

Crux Mathematicorum M344

Solució.

El costat del quadrat màgic conté $\sqrt{10000} = 100$ caselles.

Totes les files, les columnes i les diagonals sumen el mateix.

La suma total de tot el quadrat màgic és:

$$S = 1 + 2 + \dots + 10000 = \frac{10000 + 10001}{2} = 50005000 .$$

Com totes les files sumen el mateix, cada fila suma:

$$\frac{50005000}{100} = 500050 .$$

L'àrea d'un triangle equilàter $\triangle ABC$ és $q\sqrt{15}$. Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$ determineu el perímetre del triangle en funció de q .
Crux Mathematicorum M345

Solució:

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és, $S_{ABC} = q\sqrt{15}$.

Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, aleshores per ser el triangle isòsceles, $\overline{AC} = \overline{AB}$, o bé, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

a) suposem que $\overline{AC} = \overline{AB}$.

Siga $x = \overline{BC}$, aleshores, $\overline{AC} = \overline{AB} = 2x$. Siga $h = \overline{AD}$, altura del triangle.

Siga $p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 5x$ el perímetre del triangle.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$h = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{15}.$$

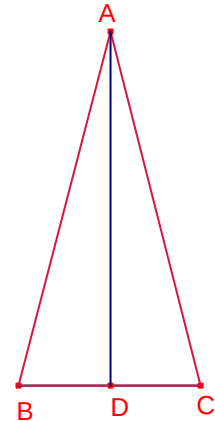
L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és: $S_{ABC} \frac{\overline{BC} \cdot h}{2} = q\sqrt{15}$:

$$\frac{x \frac{x}{2}\sqrt{15}}{2} = q\sqrt{15}. \text{ Simplificant:}$$

$x^2 = 4q$. Resolent l'equació en la incògnita x :

$x = 2\sqrt{q}$. El perímetre del triangle $\triangle ABC$ és $p = 5x = 10\sqrt{q}$.

b) suposem que $\overline{AC} = \overline{BC}$, aleshores $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$, els costats del triangle no complirien la desigualtat triangular, la qual cosa és un absurd.



Determineu el nombre de xifres que conté l'enter 2^{80} sense ajuda d'una calculadora.

Solució.

Siga N un nombre natural de n xifres.

Aleshores $10^{n-1} \leq N < 10^n$.

$\log 10^{n-1} \leq \log N < \log 10^n$

$n-1 \leq \log N < n$.

Crux Mathematicorum M346

Siga $N = 2^{80}$, $\log 2 \approx 0.3010$

$\log 2^{80} = 80 \log 2 \approx 24.08$.

$24 \leq \log 2^{80} \leq 25$.

Aleshores el nombre de xifres de 2^{80} és 25.

Resoleu el sistema
$$\begin{cases} (a+b+c)d = 420 \\ (a+c+d)b = 403 \\ (a+b+d)c = 363 \\ (b+c+d)a = 228 \end{cases}$$
 tal que a, b, c, d són enters positius.

Solució:

Crux Mathematicorum M347

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $403 = 13 \cdot 31$, $363 = 3 \cdot 11^2$, $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$
De les equacions (2) i (3) notem que b i c són imparells.

Restant les equacions (1) i (2)

$$(a+c)(d-b) = 17.$$

Com $a+c \neq 1$.

Aleshores, $a+c = 17$, $d-b = 1$.

$a+c = 17$ i c imparell, aleshores a és parell $2 \leq a \leq 16$, $1 \leq c \leq 15$

a divideix $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$, aleshores $a = 2, 4, 6, 12$

c divideix $363 = 3 \cdot 11^2$, aleshores $c = 3, 11$

Com $a+c = 17$, l'única solució és $a = 6$, $c = 11$.

$d = 1+b$. Substituint en les 4 equacions inicials:

$$\begin{cases} (17+b)(b+1) = 420 \\ (18+b)b = 403 \\ (7+2b)11 = 363 \\ (12+2b)6 = 228 \end{cases} \quad . \text{ Simplificant:}$$

$$\begin{cases} b^2 + 18b - 403 = 0 \\ b = 13 \end{cases}.$$

$$\text{Aleshores, } \begin{cases} a = 6 \\ b = 13 \\ c = 11 \\ d = 14 \end{cases}.$$

El perímetre d'un sector circular és 12 (el perímetre inclou els dos radis). Determineu el radi del cercle de màxima àrea d'aquest tipus de sector.

Crux Mathematicorum M348

Solució:

Siga el sector AOB de centre O, $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, $\alpha = \angle AOB$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

La longitud de l'arc és, αr .

El perímetre del sector és, $\alpha r + 2r = 12$.

$$\alpha = \frac{12 - 2r}{r} \quad (1)$$

$$\text{L'àrea del sector és, } S = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

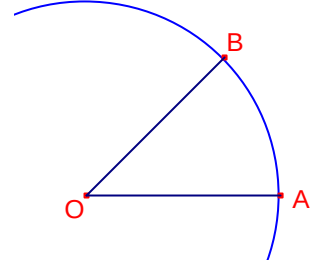
$$S = \frac{1}{2} r^2 \frac{12 - 2r}{r}.$$

$$S = -r^2 + 6r, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad \frac{6}{1+\pi} \leq r \leq 6.$$

L'àrea és una paràbola convexa, el màxim s'assoleix en el vèrtex,

$$r = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \in \left[\frac{6}{1+\pi}, 6 \right], \quad \alpha = \frac{12 - 2 \cdot 3}{3} = 2.$$

L'àrea màxima és $S_{\max} = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9$.



a) Determineu els parells de nombres enters (x,y) tal que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

b) Calculeu el nombre de solucions enteres (x,y) de l'equació $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1200}$.

Crux Mathematicorum M349

Solució:

a)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}. \text{ Notem que } x \neq 0, 5, y \neq 0, 5$$

Aïllant la incògnita y :

$$y = \frac{5x}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}.$$

$y \in \mathbb{Z}$, aleshores $x-5$ divideix a 25.

Per tant, $x-5 = 1, -1, 5, -5, 25, -25$. (notem que $x \neq 0$).

Si $x-5 = 1$, aleshores, $x = 6, y = 30$

Si $x-5 = -1$, aleshores, $x = 4, y = -20$

Si $x-5 = 5$, aleshores, $x = 10, y = 10$

Si $x-5 = 25$, aleshores, $x = 30, y = 6$

Si $x-5 = -25$, aleshores, $x = -20, y = 4$

Les solucions són els parells:

$$(x,y) = \{(6,30), (4,-20), (10,10), (30,6), (-20,4)\}.$$

Notem que el total de parells coincideix amb el nombre de divisors enters de 25 menys 1.

b)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1200}. \text{ Notem que } x \neq 0, 1200, y \neq 0, 1200.$$

Aïllant la incògnita y :

$$y = \frac{1200x}{x-1200} = 1200 + \frac{1440000}{x-1200}.$$

El nombre de solucions és igual al nombre de divisors enters de 1440000 menys 1.

$$1440000 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^4$$

El nombre de divisors enters de 1440000 és:

$$2 \cdot (8+1)(2+1)(4+1) = 270.$$

El nombre de parells solucions enteres de l'equació és $270 - 1 = 269$.

Daniel recorre amb bicicleta de Montignez a Boncourt. Una tercera part del camí és de pujada, una tercera part decendent i la resta plana. La velocitat mitjana del tram de pujada és de 16km/h i la del tram pla 24km/h. Si la velocitat mitjana del trajecte es de 24km/h. Quina és la velocitat mitjana del tram de baixada.

Crux Mathematicorum M350

Solució:

En el moviment uniforme $t = \frac{e}{v}$.

Siga x la velocitat en km/h de la baixada.

Siga e el espai en km total recorregut per la bicicleta.

El temps utilitzat en la pujada és $\frac{e}{16}$.

El temps utilitzat en el tram pla és $\frac{e}{24}$.

El temps utilitzat en la baixada és $\frac{e}{x}$.

El temps total utilitzat en el recorregut és: $\frac{e}{48} + \frac{e}{72} + \frac{e}{3x}$.

La velocitat mitjana del trajecte és de 24km/h, aleshores el temps total para realitzar el recorregut és: $\frac{e}{24}$

Igualant els temps: $\frac{e}{48} + \frac{e}{72} + \frac{e}{3x} = \frac{e}{24}$.

Simplificant:

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}.$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = 48\text{km/h}$.

Siga C un punt sobre la circumferència de centre O i radi r . Siga $\overline{AB}$ una corda de longitud r paral·lela a $\overline{OC}$. La recta AO talla la circumferència en E i talla la tangent a la circumferència per C en el punt F . La corda $\overline{BE}$ talla el segment $\overline{OC}$ en el punt L , i la recta AL talla $\overline{CF}$ en M . Determineu la raó $\overline{CF} : \overline{CM}$.
Crux Mathematicorum M351.

Solució:

Si $\overline{OC}$ és paral·lel a $\overline{AB}$ i a més a més $\overline{OC} = \overline{OA} = \overline{AB} = \overline{OB} = r$, $OABC$ és un rombe tal que $\angle OAB = 60^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle FOC = 60^\circ$

El triangle $\triangle OCF$ és rectangle ja que $\overline{CF}$ és tangent a la circumferència.
Aleshores, per ser $\angle FOC = 60^\circ$, $\overline{OF} = 2r$, $\overline{CF} = r\sqrt{3}$

$\overline{OL}$ és paral·lela mitjana del triangle $\triangle ABE$, aleshores:

$$\overline{OL} = \frac{r}{2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle OAL$:

$$\overline{AL}^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} - 2 \cdot r \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos 120^\circ.$$

$$\overline{AL} = r \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Siga $\alpha = \angle OLA$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle OLA$:

$$\frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r \frac{\sqrt{7}}{2}}{\sin 120^\circ}, \text{ aleshores, } \sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

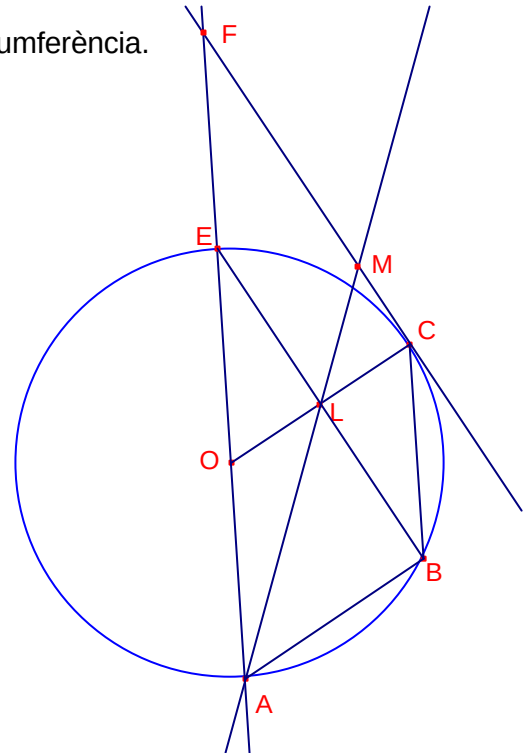
$$\text{Per tant, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle LCM$:

$$\overline{CM} = \frac{r}{2} \operatorname{tg} \alpha = r \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CF}} = \frac{r \frac{\sqrt{3}}{4}}{r \sqrt{3}} = \frac{1}{4}.$$

Per tant,
 $\overline{CF} : \overline{CM} = 4 : 1.$



Determineu el parell (x, y) de nombres tal que $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$.

Crux Mathematicorum M353.

Solució:

$$xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$$

Notem que $x, y \neq 0$.

Eliminant els denominadors:

$$x^2y^2 + y + x = 1 + x^2y + xy^2$$

$$x^2(y^2 - y) + y - 1 - x(y^2 - 1) = 0$$

$$x^2(y - 1)y + y - 1 - x(y + 1)(y - 1) = 0$$

$$(y - 1)(yx^2 - (y + 1)x + 1) = 0$$

Per tant, $y - 1 = 0$, o bé, $yx^2 - (y + 1)x + 1 = 0$

Si $y - 1 = 0$, aleshores, la solució és $y = 1$, $x = \alpha$.

Si $yx^2 - (y + 1)x + 1 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita x :

$$x = \frac{y + 1 + \sqrt{(y + 1)^2 - 4y}}{2y} = 1, \text{ aleshores, la solució és } x = 1 \text{ } y = \alpha.$$

$$x = \frac{y + 1 - \sqrt{(y + 1)^2 - 4y}}{2y} = \frac{1}{y}$$

Les solucions són:

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha \right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \sim \{0\},$$

$$(x, y) = (1, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R} \sim \{0\},$$

$$(x, y) = (\alpha, 1), \quad \alpha \in \mathbb{R} \sim \{0\}$$

Sense utilitzar calculadora factoritzeu en factors primers $3^{20} + 3^{19} - 12$
Crux Mathematicorum M354.

Solució:

$$\begin{aligned} 3^{20} + 3^{19} - 12 &= 3^{19}(3+1) - 3 \cdot 4 = \\ &= (3^{19} - 3)2^2 = \\ &= 2^2 \cdot 3(3^{18} - 1) = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot \left((3^3)^3 + 1 \right) \left((3^3)^3 - 1 \right) = \quad (*) \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot (3^3 + 1) \cdot \left((3^3)^2 - 3^3 + 1 \right) (3^3 - 1) \cdot \left((3^3)^2 + 3^3 + 1 \right) = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 703 \cdot 26 \cdot 757 = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 757 = \\ &= 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 757 \end{aligned}$$

Nota (*) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

Siga un con de revolució de vèrtex C i una base de radi 8 i apotema 24.

Siga A, B dos punts de la circumferència base situats sobre un diàmetre, i P un punt sobre el segment $\overline{CB}$.

a) Si $\overline{CP} = 18$, determineu el camí més curt sobre el con partint de A i passant per P i finalitzant en A.

b) Trobeu la posició de P sobre $\overline{CB}$ que minimitza la longitud més curta del camí mencionat en a).

Crux Mathematicorum M355

Solució:

a)

Si tallem el con (sense la base) des de B fins a C i despleguem la figura, ens quedaria un sector circular de radi 24 i l'arc mesuraria la longitud de circumferència de radi 8 (radi de la circumferència de la base del con).

Per ser AB diàmetre el punt A es troba en la meitat de l'arc.

L'arc de circumferència BB' mesura $2\pi \cdot 8 = 16\pi$.

L'angle $\angle BCB' = \frac{16\pi}{24} = \frac{2\pi}{3}$.

$\angle BCA = \frac{\angle BCB'}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle APC$:

$$\overline{AP}^2 = 24^2 + 18^2 - 2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 468$$

$$\overline{AP} = 6\sqrt{13}$$

El camí més curt és $2 \cdot \overline{AP} = 12\sqrt{13}$.

b)

Siga $x = \overline{CP}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle APC$:

$$\overline{AP}^2 = 24^2 + x^2 - 2 \cdot 24 \cdot x \cdot \cos \frac{\pi}{3} = x^2 - 24x + 24^2$$

Considerem la funció $f(x) = x^2 - 24x + 24^2$ que és una paràbola còncaua. El mínim de la funció s'assoleix en el vèrtex.

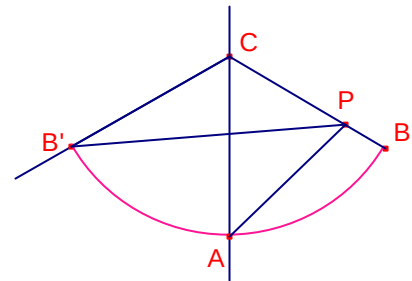
El vèrtex es troba en $x = \frac{24}{2} = 12$.

El valor mínim de $\overline{AP}$ és el valor mínim de $\overline{AP}^2$, s'assoleix quan $\overline{CP} = 12$

La distància mínima entre A i P és:

$$\overline{AP} = \sqrt{12^2 - 24 \cdot 12 + 24^2} = 12\sqrt{3}$$

El camí més curt mesura $2 \cdot \overline{AP} = 24\sqrt{3}$.



Determineu les solucions reals de l'equació $3^{2x} + 3 = 3^x + 3^{x+3}$.
Crux Mathematicorum M357.

Solució:

Siga $A = 3^x$.

Aleshores, $3^{2x+2} = 3^2(3^x)^2 = 9A^2$, $3^{x+3} = 3^3 3^x = 27A$.

Aleshores l'equació inicial es transformaria en:

$$9A^2 + 3 = A + 27A.$$

$$9A^2 - 28A + 3 = 0.$$

Resolent l'equació en la incògnita A:

$$A = 3 \text{ . } A = 3^{-2}.$$

Si $A = 3$, $3^x = 3$, aleshores, $x = 1$.

Si $A = 3^{-2}$, $3^x = 3^{-2}$, aleshores, $x = -2$

Quants enters de la llista $1, 2008, 2008^2, \dots, 2008^{2009}$ són a la vegada quadrats perfectes i cubs perfectes?
Crux Mathematicorum M358.

Solució:

$$1 = 2008^0, 2008, 2008^2, \dots, 2008^{2009}$$

$2008 = 2^3 \cdot 2512$, que no és un quadrat ni un cub perfecte.

A fi que un nombre de la llista siga quadrat perfecte l'exponent ha de ser múltiple de 2.
A fi que un nombre de la llista siga cub perfecte l'exponent ha de ser múltiple de 3.

Aleshores, per a que siga quadrat i cub perfecte ha de ser múltiple de 6.

Els exponents són $0, 1, 2, \dots, 2009$.

El darrer múltiple de 6 és 2004.

Considerem la successió de múltiples de 6: $0, 6, 12, \dots, 2004$.

Siga n el total de termes:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ on } d = 6$$

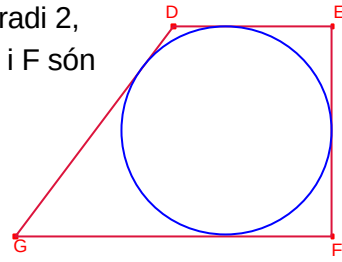
$$2004 = 0 + (n-1)6. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$n = 335.$$

Aleshores, hi ha 335 nombres de la llista que són quadrats i cubs perfectes a la vegada.

Un trapezi DEFG està circumscribit a una circumferència de radi 2, com indica la figura. Els costat $\overline{DE}$ mesura 3 i els angles E i F són rectes. Determineu l'àrea del trapezi.
Crux Mathematicorum M359

Solució:



Siga O el centre de la circumferència.

Siguen T_1, T_2, T_3, T_4 . Els punts de tangència de la circumferència i els costats del trapezi.

$$\overline{OT_1} = \overline{OT_3} = \overline{OT_4} = \overline{ET_3} = \overline{ET_4} = \overline{FT_1} = \overline{FT_4} = 2.$$

$$\overline{EF} = 4.$$

$$\text{Siga } x = \overline{GT_1} = \overline{GT_2}, \quad \overline{DT_2} = \overline{DT_3} = \overline{DE} - \overline{ET_3} = 1.$$

Siga H la projecció de D sobre el costat $\overline{GF}$.

$$\overline{GH} = x - 1.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle GHD$:

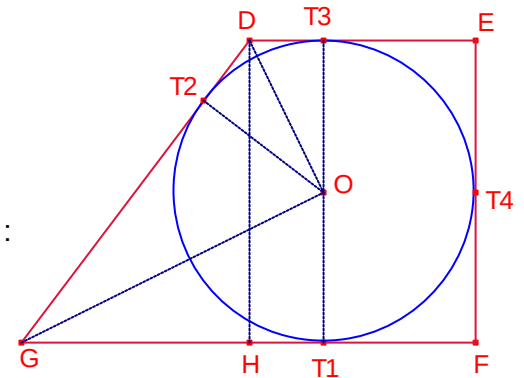
$$(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4^2. \text{ Simplificant:}$$

$$x = 4$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{\text{DEFG}} = \frac{\overline{GF} + \overline{DE}}{2} \cdot \overline{EF} = \frac{(2+4)+3}{2} 4 = 18.$$

(1)



Determineu tots els enters positius que satisfan $3^x = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Crux Mathematicorum M360.

Solució:

Siga $x \in \mathbb{N}$.

$$3^x - 1 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

Factoritzant el polinomi:

$$3^x - 1 = x(x+1)(x+2).$$

Utilitzant congruències mòdul 3:

$$3^x - 1 \equiv -1 \pmod{3}.$$

$$x(x+1)(x+2) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Aleshores, l'equació no té solució en els enters positius.

Siguen a, b, c tres nombres reals positius. Demostreu que:

$$ab(a+b-c) + bc(b+c-a) + ca(c+a-b) \geq 3abc.$$

Crux Mathematicorum M361.

Solució:

$$\begin{aligned} ab(a+b-c) + bc(b+c-a) + ca(c+a-b) &= abc \frac{a+b-c}{c} + abc \frac{b+c-a}{a} + abc \frac{c+a-b}{b} = \\ &= abc \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} - 1 \right) = \\ &= abc \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 3 \right) \geq abc(2+2+2-3) = 3abc. \end{aligned}$$

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

Nota:

Si $a, c > 0$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ i la igualtat s'assoleix quan $a = c$.

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{ac} = \frac{(a-c)^2}{ac} \geq 0, \text{ i la igualtat s'assoleix si } a - c = 0.$$

Aleshores, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$.

Siga A un enter positiu de sis xifres i B l'enter positiu format per les xifres de A en ordre invers.

Demostreu que $A - B$ és múltiple de 9.

Crux Mathematicorum M363.

Solució:

Nota 1:

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \dots + xy^{2n-1} + y^{2n})$$

$$\text{Siga } A = abcdef_{(10)} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f.$$

$$B = fedcba_{(10)} = f \cdot 10^5 + e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a.$$

$$A - B = (a - f)(10^5 - 1) + (b - e)(10^4 - 10) + (c - d)(10^3 - 10^2).$$

$$A - B = (a - f)(10^5 - 1) + (b - e)10(10^3 - 1) + (c - d)10^2(10 - 1).$$

Aplicant la nota 1:

$$A - B = (a - f)(10 - 1)(10^4 10^3 + 10^2 + 10 + 1) + (b - e)10(10 - 1)(10^2 + 10 + 1) + (c - d)10^2 \cdot 9$$

$$A - B = 9((a - f)(10^4 10^3 + 10^2 + 10 + 1) + (b - e)10(10^2 + 10 + 1) + (c - d)10^2)$$

Per tant, $A - B$ és múltiple de 9.

En un semicercle de radi 2 i diàmetre $\overline{AB}$, es dibuixa un quadrat PQRS amb P i Q sobre el semicercle, i R i S sobre $\overline{AB}$. L'àrea del quadrat és més petita o més gran que la meitat de l'àrea del semicercle?

Crux Mathematicorum M364.

Solució:

L'àrea del semicercle és $S = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

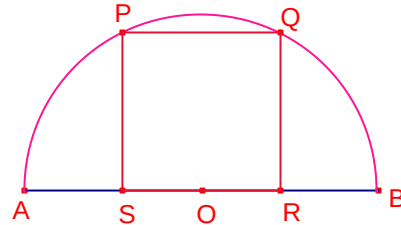
L'àrea de la meitat del semicercle és π

Siga $x = \overline{PQ}$ costat del quadrat.

Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$$\overline{OS} = \overline{OR} = \frac{x}{2}.$$

$$\overline{OP} = \overline{OA} = 2.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OSP$:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2^2. \text{ Simplificant:}$$

$$x^2 = \frac{16}{5}.$$

L'àrea del quadrat és $S_{PQRS} = x^2 = \frac{16}{5}$.

$\frac{16}{5} > \pi$, aleshores l'àrea del quadrat és major que la meitat de l'àrea del semicercle.

Siguen p, q, r les arrels de l'equació $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Trobeu una equació quadràtica que les arrels siguin $p^2 + q^2 + r^2$ i $p + q + r$.
Crux Mathematicorum M366.

Solució:

Aplicant las fórmules de Cardano-Vieta a l'equació $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$pqr = -d$$

$$pq + pr + qr = c \quad (1)$$

$$p + q + r = -b \quad (2)$$

Siga $x^2 + mx + n = 0$ l'equació de segon grau que té per arrels $p^2 + q^2 + r^2$ i $p + q + r$.
Determinem m, n en funció de b, c, d .

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$-m = (p^2 + q^2 + r^2) + (p + q + r) \quad (3)$$

$$n = (p^2 + q^2 + r^2)(p + q + r) \quad (4)$$

$$(-b)^2 = (p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + pr + qr)$$

$$p^2 + q^2 + r^2 = b^2 - 2(pq + pr + qr).$$

Per tant,

$$p^2 + q^2 + r^2 = b^2 - 2c \quad (5)$$

Substituint les expressions (2) i (5) en les expressions (3) i (4):

$$-m = (p^2 + q^2 + r^2) + (p + q + r) = b^2 - 2c - b$$

$$n = (p^2 + q^2 + r^2)(p + q + r) = (b^2 - 2c)(-b)$$

Per tant:

$$m = -b^2 + 2c + b.$$

$$n = -b^3 + 2bc.$$

L'equació que cerquem és:

$$x^2 + (-b^2 + 2c + b)x - b^3 + 2bc = 0.$$

Siguen a , b , i c tres nombres reals positius tal que $a + b + c = 6$.
Determineu el valor màxim possible de $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.
Crux Mathematicorum M367.

Solució:

Nota 1 Desigualtat entre la mitjana aritmètica y geomètrica:

Si $x, y > 0$, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ i la igualtat s'assoleix quan $x = y$.

Aplicant la nota 1:

$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq a\frac{b+c}{2} + b\frac{a+c}{2} + c\frac{a+b}{2}$. La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq ab + ac + bc \quad (1)$$

Aplicant la nota 1:

$$a^2 + b^2 \leq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

$$a^2 + c^2 \leq 2ac$$

$$b^2 + c^2 \leq 2bc$$

Sumant la tres desigualtats:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \leq 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + ac + bc \quad (2)$$

$$6^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc).$$

Aplicant l'expressió (2):

$$36 \leq 3(ab + ac + bc)$$

$ab + ac + bc \leq 12$. La igualtat s'assoleix quan $a = b = c$.

Per tant, $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq ab + ac + bc \leq 12$. La igualtat s'assoleix quan $a = b = c = 2$.

Siguen $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ i $D(0,4)$ els vèrtexs d'un rectangle.

Pel punt $P(4,3)$ tracem dues rectes: una recta horitzontal que talla BC en M i AD en N i una altra recta vertical que talla la AB en Q i CD en R .

Demostreu que les rectes AP , DM i BR passen per un mateix punt.

Crux Mathematicorum M369.

Solució 1.

Siga S la intersecció de les rectes AP , RB .

Siga H la projecció de S sobre el costat AB .

Siga $x = \overline{AH}$, $y = \overline{SH}$. Calculem les coordenades de S $S(x, y)$.

Els triangles $\triangle AQP$, $\triangle AHS$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle BQR$, $\triangle BHS$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{y}{6-x} = \frac{4}{2} \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{4} \\ \frac{y}{6-x} = 2 \end{cases} \text{ . La solució és: } \begin{cases} x = \frac{48}{11} \\ y = \frac{36}{11} \end{cases} \text{ . Aleshores, } S\left(\frac{48}{11}, \frac{36}{11}\right)$$

Siga S' la intersecció de les rectes RB , DM .

Siga J la projecció de S' sobre el costat BC .

Siga $x = \overline{S'J}$, $y = \overline{BJ}$. Calculem les coordenades de S' $S'(6-x, y)$.

Els triangles $\triangle BCR$, $\triangle BJS'$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{4} \quad (3)$$

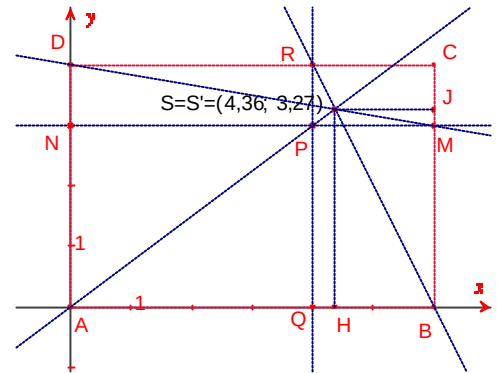
Els triangles $\triangle DMC$, $\triangle S'JM$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

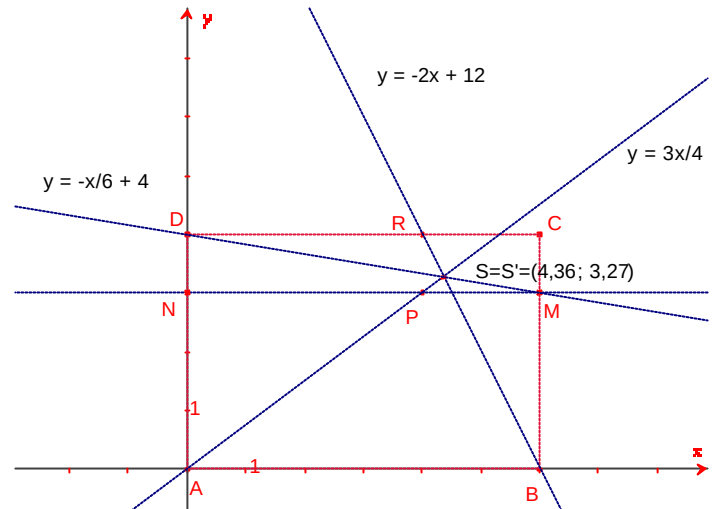
$$\frac{x}{y-3} = \frac{6}{1} \quad (4)$$

Considerem el sistema format per les expressions (3) (4):

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y-3} = 6 \end{cases} \text{ . La solució és: } \begin{cases} x = \frac{18}{11} \\ y = \frac{36}{11} \end{cases} \text{ . Aleshores, } S'\left(6 - \frac{18}{11}, \frac{36}{11}\right) = S'\left(\frac{48}{11}, \frac{36}{11}\right)$$

Aleshores, $S = S'$, per tant, les rectes AP , BR , DM s'intersecten en un punt.





Un segment $\overline{AB}$ de longitud 3 conté un punt C tal que $\overline{AC} = 2$. Sobre el mateix costat del segment $\overline{AB}$ s'han construït els triangles equilàters $\triangle ACF$ i $\triangle CBE$.

Determineu l'àrea del triangle $\triangle AKE$ si K és el punt mig de $\overline{FC}$.
Crux Mathematicorum M371.

Solució:

$$\overline{CK} = \frac{1}{2}\overline{CF} = 1.$$

$$\angle KCE = 60^\circ.$$

Aleshores, el triangle $\triangle CKE$ és equilàter.

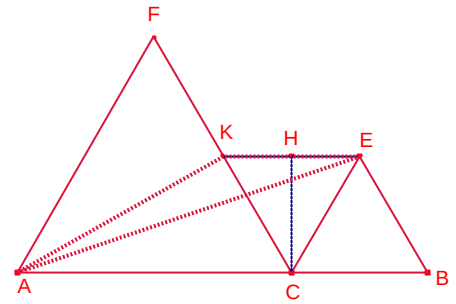
Per tant, $\overline{KE} = 1$.

L'àrea del triangle equilàter $\triangle CKE$ és $S_{CKE} = \frac{\sqrt{3}}{4}1^2$.

$\overline{KE}$ és paral·lel a $\overline{AB}$.

Els triangles $\triangle CEK$, $\triangle AKE$ tenen la mateixa base $\overline{KE}$ i la mateixa altura sobre aquest costat, per tant tenen la mateixa àrea:

$$S_{AKE} = S_{CEK} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Siga x un nombre real que satisfà $x^3 = x + 1$.

Determineu els enters a , b , i c tal que $x^7 = ax^2 + bx + c$
Crux Mathematicorum M372.

Solució:

$$x^3 = x + 1$$

$$x^6 = (x^3)^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^7 = x \cdot x^6 = x^3 + 2x^2 + x = x + 1 + 2x^2 + x = 2x^2 + 2x + 1.$$

Aleshores, $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$.

Determineu totes les solucions reals del sistema d'equacions

$$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} = 4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad xyz = \frac{9}{2}.$$

Crux Mathematicorum M375.

Solució:

Si $xyz = \frac{9}{2}$ aleshores, $x, y, z \neq 0$.

Multiplicant la primera expressió per $x^2 y^2 z^2 \neq 0$.

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 4x^2 y^2 z^2.$$

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 4\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 4\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$y^2 z^2 + 4x^2 z^2 + 9x^2 y^2 = 81 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2 z^2}{81} - \frac{2}{27}xyz \quad (2)$$

$$\left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 = \frac{y^2}{9} + \frac{4x^2 z^2}{81} - \frac{4}{27}xyz \quad (3)$$

$$\left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = \frac{z^2}{9} + \frac{9y^2 x^2}{81} - \frac{6}{27}xyz \quad (4)$$

Sumant les expressions (2) (3) (4):

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 + \left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{81}(9x^2 y^2 + 4x^2 z^2 + y^2 z^2) - \frac{12}{27}xyz$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 + \left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}9 + \frac{1}{81}81 - \frac{12}{27} \frac{9}{2}.$$

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{yz}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{3} - \frac{2xz}{9}\right)^2 + \left(\frac{z}{3} - \frac{3xy}{9}\right)^2 = 0.$$

Aleshores els tres sumands són zero:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{yz}{9} = 0 \\ \frac{y}{3} - \frac{2xz}{9} = 0 \\ \frac{z}{3} - \frac{3xy}{9} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - yz = 0 \\ 3y - 2xz = 0 \\ z - xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = xy \\ 3x - xy^2 = 0 \end{cases} \text{ . Com } x, y, z \neq 0, \text{ aleshores:} \\ 3y - 2x^2y = 0$$

$$\begin{cases} z = xy \\ 3 - y^2 = 0 \end{cases} \text{ . Aleshores les solucions del sistema són:} \\ 3 - 2x^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = \sqrt{3} \\ z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = \sqrt{3} \\ z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ z = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ y = -\sqrt{3} \\ z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Resoleu l'equació $(10^{2009} + 25)^2 - (10^{2009} - 25)^2 = 10^x$.
Crux Mathematicorum M376

Solució:

$$(10^{2009} + 25)^2 - (10^{2009} - 25)^2 = 10^x.$$

$$(10^{2009} + 25 + 10^{2009} - 25)(10^{2009} + 25 - (10^{2009} - 25)) = 10^x.$$

$$(2 \cdot 10^{2009})50 = 10^x.$$

$$100 \cdot 10^{2009} = 10^x.$$

$$10^{2011} = 10^x.$$

Per tant, $x = 2011$.

Determineu la successió aritmètica formada per 9 enters positius de tal forma que la suma estiga entre 200 i 220, i el segon terme val 12.

Crux Mathematicorum M377

Solució.

Siga la progressió aritmètica que cerquem, $\{12 + d(n - 2)\}_{n=1}^9$.

El segon terme és 12 i la diferència és d , $d \in \mathbb{Z}$.

Com els nou termes són enters positius, $12 - d > 0$, y $12 + 7d > 0$.

Per tant, $d \leq 11$, $d \geq -1$.

La suma dels 9 termes és:

$$S_9 = \frac{12 - d + 12 + 7d}{2} 9 = (12 + 3d)9.$$

Per hipòtesi, $200 \leq S_9 \leq 220$.

$$200 \leq 108 + 27d \leq 220$$

$$\frac{92}{27} \leq d \leq \frac{112}{27}, d \in \mathbb{Z}$$

$$4 \leq d \leq 4.$$

Aleshores, $d = 4$.

Per tant la progressió que cerquem és $\{12 + 4(n - 2)\}_{n=1}^9$ i la suma dels nou termes és 216.

Siguen els punts C i D de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.
Siga P la intersecció de les rectes CB i DA, i siga Q la intersecció de les rectes AC i BD. Demostreu que la recta PQ és perpendicular a AB.
Crux Mathematicorum M378.

Solució:

Siguen $\alpha = \angle CAD$, $\beta = \angle DAB$, $\gamma = \angle AQP$.

Per demostrar que PQ és perpendicular a AB és suficient provar que γ y $\alpha + \beta$ són complementaris.

Notem que per ser angles interiors i abraçar el mateix arc.

$$\alpha = \angle CAD = \angle CBD$$

Notem que els triangles $\triangle ACP$, $\triangle ADQ$, $\triangle BCQ$, $\triangle BDP$ són rectangles, ja que els angles inscrits C i D abracen mitja circumferència.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{CQ}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}.$$

$$\text{Per tant, } \overline{BC} = \overline{CQ} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DQ}}, \quad \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DQ}} \quad (1)$$

Notem que el triangle $\triangle ACB$ és rectangle, ja que l'angle inscrit C abraça mitja circumferència.

Per tant, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. Substituint les expressions (1) i (2):

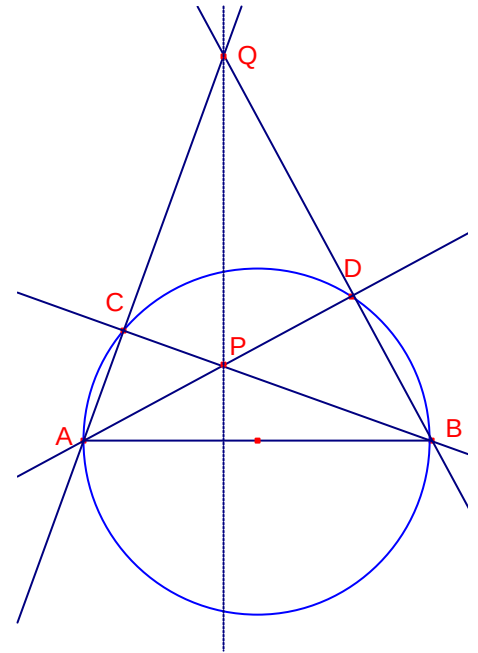
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CQ} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DQ}}}{\overline{PC} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{DQ}}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}}.$$

Notem que el triangle $\triangle QCP$ és rectangle, ja que l'angle inscrit C abraça mitja circumferència.

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}}.$$

Aleshores, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{ctg} \gamma$, per tant, γ i $\alpha + \beta$ són complementaris.

PQ és perpendicular a AB



Els enters $27 + C$, $555 + C$, $1371 + C$ són tots quadrats perfectes i les seues arrels formen una progressió aritmètica. Determineu tots els valors possibles de C .

Crux Mathematicorum M379

Solució:

Siguen $27 + C = p^2$, $555 + C = (p + d)^2$, $1371 + C = (p + 2d)^2$, on $p, d \in \mathbb{Z}$.

Aquests nombres compleixen les hipòtesis de l'enunciat.

$$\begin{cases} 27 + C = p^2 \\ 555 + C = p^2 + d^2 + 2pd \\ 1371 + C = p^2 + 4d^2 + 4pd \end{cases}$$

Restant la segona menys la primera i la tercera menys la primera:

$$\begin{cases} d^2 + 2pd = 528 \\ 4d^2 + 4pd = 1344 \end{cases}$$

Les solucions del sistema són: $\begin{cases} d = 12 \\ p = 16 \end{cases}$, $\begin{cases} d = -12 \\ p = -16 \end{cases}$

En qualsevol de les dues solucions substituint en la primera equació:

$$27 + C = 16^2.$$

Per tant, $C = 16^2 - 27 = 229$.

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, siga $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ tal que $a \geq b$. Exterior al triangle $\triangle ABC$ s'han construït els quadrats $ABDE$, $BCFG$ i $CAHI$. Siguen P , Q , R les interseccions de les rectes FI i EH , FI i DG , DG i EH , respectivament. Determineu el valor $\frac{b}{a}$ a fi que el triangle $\triangle PQR$ siga rectangle.

Crux Mathematicorum M380.

Solució:

Siga $c = \overline{AB}$. Sea $\alpha = \angle BAC$. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.

El triangle $\triangle ICF$ és igual al triangle $\triangle ACB$. $\angle FIC = \alpha$. Aleshores, $\angle HIP = 90^\circ - \alpha$

Per a que el triangle $\triangle PQR$ siga rectangle s'ha de complir que $\angle IHP = \alpha$.

O bé, $\angle AHE = 90^\circ - \alpha$.

$\angle EAH = 180^\circ - \alpha$. $\angle AEH = 2\alpha - 90^\circ$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle HAE$:

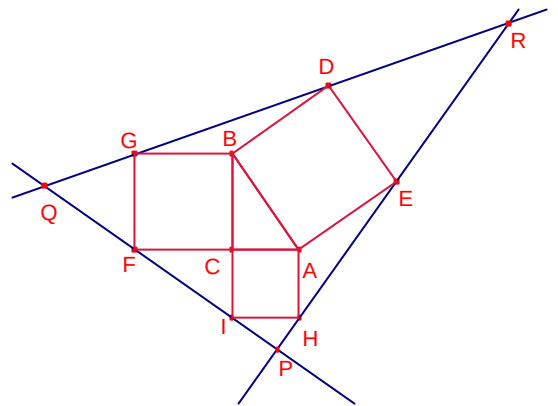
$$\frac{\overline{AE}}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\overline{AH}}{\sin(2\alpha - 90^\circ)}.$$

$$\frac{c}{\cos \alpha} = \frac{b}{-\cos 2\alpha}.$$

$$\frac{c}{\cos \alpha} = \frac{b}{-(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}.$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{-\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}}. \text{ Simplificant: } \frac{1}{b} = \frac{b}{a^2 - b^2}.$$

$$a^2 = 2b^2. \text{ Aleshores, } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Determineu totes les solucions de l'equació:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x-6} + \frac{7}{x-7} = x^2 - 4x - 4$$

Crux Mathematicorum M381.

Solució:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x-6} + \frac{7}{x-7} = x^2 - 4x - 4.$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x-6} + \frac{7}{x-7} + 4 = x^2 - 4x.$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-2} + \frac{x}{x-6} + \frac{x}{x-7} = x^2 - 4x.$$

$$x \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-7} \right) - x(x-4) = 0$$

$$x \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-7} - (x-4) \right) = 0.$$

Aleshores, $x = 0$.

O bé:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-7} - (x-4) = 0.$$

Efectuem el canvi $x - 4 = t$:

$$\frac{1}{t+3} + \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t-2} + \frac{1}{t-3} - t = 0.$$

$$\frac{2t}{(t+3)(t-3)} + \frac{2t}{(t+2)(t-2)} - t = 0.$$

$$t \left(\frac{2}{(t+3)(t-3)} + \frac{2}{(t+2)(t-2)} - 1 \right) = 0.$$

Aleshores, $t = 0$, és a dir, $x = 4$.

O bé:

$$\frac{2}{(t+3)(t-3)} + \frac{2}{(t+2)(t-2)} - 1 = 0$$

$$\frac{t^4 - 17t^2 + 62}{(t+3)(t-3)(t+2)(t-2)} = 0$$

Aleshores, $t^4 - 17t^2 + 62 = 0$, resolent l'equació biquadrada:

$$t = \pm \sqrt{\frac{17 \pm \sqrt{41}}{2}}.$$

Desfent el canvi, l'equació inicial té 6 solucions:

$$x = 0, \quad x = 4, \quad x = 4 + \sqrt{\frac{17 + \sqrt{41}}{2}}, \quad x = 4 - \sqrt{\frac{17 + \sqrt{41}}{2}}, \quad x = 4 + \sqrt{\frac{17 - \sqrt{41}}{2}},$$

$$x = 4 - \sqrt{\frac{17 - \sqrt{41}}{2}}.$$

Determineu els parells (x, y) d'enters tals que $4x^2 - y^2 = 480$.

Crux Mathematicorum M382.

Solució:

Si (x, y) és solució de l'equació $4x^2 - y^2 = 480$, també són solucions

$(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$.

Aleshores, podem suposar $x \geq 0, y \geq 0$

$$4x^2 - y^2 = 480.$$

$$y^2 = 4x^2 - 480.$$

Per tant, y^2 és múltiple de 4. Per tant y és múltiple de 2.

$$y = 2k, \quad k \geq 0$$

$$4x^2 - (2k)^2 = 480. \text{ Simplificant:}$$

$$x^2 - k^2 = 120$$

$$(x+k)(x-k) = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

$x+k, x-k$ tenen la mateixa congruència mòdul 2, i el seu producte és parell

aleshores, $x+k, x-k$ els dos són parells, $x-k \leq x+k$

Els possibles resultats són:

- e) $\begin{cases} x+k=60 \\ x-k=2 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=31 \\ k=29 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=31 \\ y=58 \end{cases}$.
- g) $\begin{cases} x+k=30 \\ x-k=4 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=17 \\ k=13 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=17 \\ y=26 \end{cases}$.
- k) $\begin{cases} x+k=12 \\ x-k=10 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=11 \\ k=1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=11 \\ y=2 \end{cases}$.
- i) $\begin{cases} x+k=20 \\ x-k=6 \end{cases}$. La solució és $\begin{cases} x=13 \\ k=7 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} x=13 \\ y=14 \end{cases}$.

Les solucions són 16:

$$(\pm 31, \pm 58), (\pm 17, \pm 26), (\pm 11, \pm 2), (\pm 13, \pm 14).$$

En un rectangle ABCD siga P sobre $\overline{BC}$ i Q sobre $\overline{DC}$ tal que $\overline{BP} = 1$, $\overline{AP} = \overline{PQ} = 2$ i l'angle $\angle APQ = 90^\circ$. Determineu la mesura de $\overline{QD}$
Crux Mathematicorum M383.

Solució:

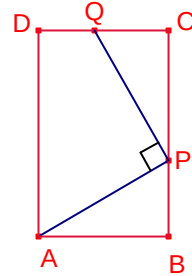
$\overline{BP} = 1$, $\overline{AP} = 2$, $\angle ABC = 90^\circ$, aleshores:

$\angle APB = 60^\circ$, $\overline{AB} = \sqrt{3}$.

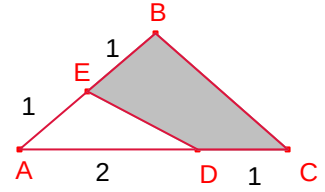
$\angle QPC = 30^\circ$.

Com $\overline{PQ} = 2$, $\angle PCQ = 90^\circ$. Aleshores $\overline{CQ} = 1$.

$\overline{QD} = \overline{AB} - \overline{CQ} = \sqrt{3} - 1$.



En la figura, el punt E està sobre el costat $\overline{AB}$ i D sobre el costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{DC} = 1$ i $\overline{AD} = 2$. Determineu la raó entre l'àrea del quadrilàter BCDE i l'àrea del triangle $\triangle ABC$.
Crux Mathematicorum 384

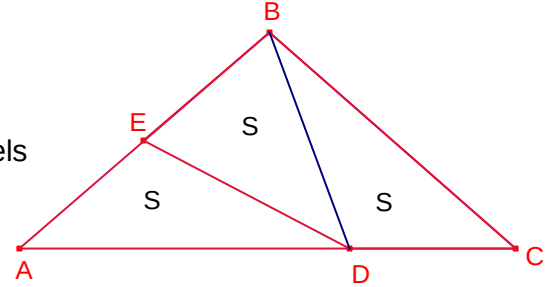


Solució.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les seues àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\triangle ADE$.

Els triangles $\triangle ADE$, $\triangle BED$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{AE}$, $\overline{EB}$, respectivament i les seues bases són iguals. Aleshores, l'àrea de $\triangle BED$ és S .



Els triangles $\triangle ADB$, $\triangle DCB$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, respectivament. Les àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{S_{DCB}}{S_{ADB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores l'àrea del triangle $\triangle DCB$ és S .

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és $3S$.
L'àrea del quadrilàter BCDE és $2S$.

La proporció entre l'àrea del quadrilàter BCDE i la del triangle $\triangle ABC$ és $\frac{2}{3}$.

En base 10 un nombre natural $N = 1\dots 114\dots 44$ comença amb 2009 xifres 1 consecutives, seguides de 4018 xifres 4 consecutives. Demostreu que N no és un quadrat perfecte.

Crux Mathematicorum M385.

Solució

$$\text{Siga } a = 1 \dots \overset{(2009)}{\dots} 1 = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2008}.$$

Aleshores:

$$N = a \cdot 10^{4018} + 4a \cdot 10^{2009} + 4a.$$

$$N = a \cdot (10^{4018} + 4 \cdot 10^{2009} + 4).$$

$$N = a \cdot (10^{2009} + 2)^2.$$

Vegem que a no és un quadrat perfecte.

Si un nombre és un quadrat perfecte i la xifra de les unitats és 1, la seua arrel quadrada acaba amb 1, o 9.

Vegem que si un nombre la xifra de les unitats és 1 en elevar-lo al quadrat la xifra de les desenes no pot ser 1.

Siga $x = p \cdot 10^2 + q \cdot 10 + 1$, $0 \leq q \leq 9$ un nombre tal que la xifra de les unitats és 1.

$$x^2 = p^2 + 10^4 + 2pq \cdot 10^3 + (2p + q^2)10^2 + 2q \cdot 10 + 1.$$

La xifra de les desenes és parella.

Vegem que si un nombre la xifra de les unitats és 9 en elevar-lo al quadrat la xifra de les desenes no pot ser 1.

Siga $x = p \cdot 10^2 + q \cdot 10 + 9$, $0 \leq q \leq 9$ un nombre tal que la xifra de les unitats és 9.

$$x^2 = p^2 + 10^4 + 2pq \cdot 10^3 + (18p + q^2)10^2 + (18q + 8) \cdot 10 + 1$$

La xifra de les desenes és parella.

Per tant a no és un quadrat perfecte. Per tant N no és un quadrat perfecte.

Determineu tots els nombres reals pels quals

$$\sqrt{2+4x-2x^2} + \sqrt{6+6x-3x^2} = x^2 - 2x + 6$$

Crux Mathematicorum M386

Solució:

$f(x) = \sqrt{2+4x-2x^2}$ està definida en $x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ és convexa i té un màxim en $x = 1$.

Aleshores, $\sqrt{2+4x-2x^2} \leq \sqrt{2+4 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2} = 2$.

$g(x) = \sqrt{6+6x-3x^2}$ està definida en $x \in [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$ és convexa i té un màxim en $x = 1$.

Aleshores, $\sqrt{6+6x-3x^2} \leq \sqrt{6+6 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2} = 3$.

Les solucions de l'equació estan en $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \cap [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}] = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

Considerem la funció $h(x) = x^2 - 2x + 6$ és una paràbola còncaua, té un mínim en $x = 1$.

$$x^2 - 2x + 6 \geq 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 5.$$

Siga l'equació $f(x) + g(x) = h(x)$, $x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

$$f(x) + g(x) \leq 5, \quad \forall x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}], \quad f(1) + g(1) = 5,$$

$$f(x) + g(x) < 5, \quad \forall x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \sim \{1\}.$$

$$h(x) \geq 5, \quad \forall x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}], \quad h(1) = 5.$$

$$h(x) > 5, \quad \forall x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \sim \{1\}.$$

Per tant l'única solució de l'equació es $x = 1$.

La temperatura es pot mesurar amb graus Fahrenheit (F) o en graus Celcius (C). Les dues escales estan relacionades per la fórmula $F = 1.8C + 32$.

Al convertir en Fahrenheit una temperatura donada en Celsius per un nombre de dues xifres, es constata que una vegada les mesures Fahrenheit arrodonides a l'enter més proper les unitats i les desenes han estat permutades. Determineu els valors enters de dues xifres en C per a les quals es compleix la propietat.

Crux Mathematicorum M387.

Solució:

La temperatura (F), per les condicions del problema només poden tenir dos dígit.

$$1.8C + 32 \leq 99.$$

$$C \leq 37$$

La temperatura (C), per les condicions del problema només poden tenir dos dígit.

El valor de la temperatura (F) sempre és major que el valor de la temperatura (C) per a la mateixa temperatura.

$$C = ab_{(10)}, a < b.$$

$$12 \leq C \leq 37$$

Provem només amb els valors que compleixen les condicions:

Celsius	Fahrenheit	float(Fahrenheit)
12	53,6	54
13	55,4	55
14	57,2	57
15	59	59
16	60,8	61
17	62,6	63
18	64,4	64
19	66,2	66
23	73,4	73
24	75,2	75
25	77	77
26	78,8	79
27	80,6	81
28	82,4	82
29	84,2	84
34	93,2	93
35	95	95
36	96,8	97
37	98,6	99

Les solucions del problema són:

$$16C \approx 61F.$$

$$28C \approx 82F.$$

Es forma una successió escrivint en ordre creixent, per a cada enter n , els múltiples de n compresos entre n i n^2 . La successió comença així:

1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, 6, 12,.....

Determineu el terme 2009 de la successió.

Crux Mathematicorum M388.

Solució:

La successió és:

1·1, 2·1, 2·2, 3·1, 3·2, 3·3, 4·1, 4·2, 4·3, 4·4,.....

$$1 + 2 + 3 + \dots + 62 = \frac{1+62}{2} \cdot 62 = 1953.$$

Aleshores el número que ocupa el lloc 1953 és $62 \cdot 62$.

El que ocupa el lloc 1954 és $63 \cdot 1$.

El que ocupa el lloc 1955 és $63 \cdot 2$.

.....

El que ocupa el lloc 2009 és $63 \cdot 56 = 3528$.

2009 estudiants tenen cadascun una carta amb un nombre enter positiu diferent. La suma d'aquestes cartes és 2020049. Quins valors possibles per a la mediana dels nombres de les cartes.

Crux Mathematicorum M389.

Solució:

Siguen $\{a_i\}_{i=1}^{2009}$ els nombres de les cartes, ordenats de forma creixent, $a_i < a_{i+1}$ $i = 1, 2, \dots, 2008$ tal que

$$\sum_{i=1}^{2009} a_i = 2020049.$$

Ordenats tots els $\{a_i\}_{i=1}^{2009}$ de menor a major la mediana és el terme que ocupa el lloc 1005.

El menor valor per a què la mediana (com totes les cartes tenen distint nombre) és la successió tal que els primers 1005 nombres són els primers nombres naturals. Aleshores la mediana és 1005.

$$\text{Notem que } \sum_{i=1}^{1004} i = \frac{1+1004}{2} 1004 = 504510.$$

La successió que té per mediana el major valor els primers 1004 valors són els primers nombres naturals.

$$\sum_{i=1005}^{2009} a_i = 2020049 - 504510 = 1515539$$

Suposem que $a_{1005} > 1005$.

$a_{i+1} > a_i$, com tots els nombres són distints, $a_i \geq i+1$.

$$\sum_{i=1005}^{2009} a_i \geq \sum_{i=1005}^{2009} (i+1) = \frac{1006+2010}{2} 1005 = 1515540.$$

La qual cosa és absurda.

Aleshores, $a_{1005} = 1005$.

Per tant en qualsevol cas la mediana és 1005.

Un triangle pitagòric (rectangle i els 3 costats són mesures nombres naturals) de catets a i b la longitud de l'altura sobre la hipotenusa és h . Determineu tots els triangles tals

que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h} = 1$.

Crux Mathematicorum M390.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, $a, b, c \in \mathbb{N}$. Siga S l'àrea del triangle.

Siga $h = \overline{CH}$ altura sobre la hipotenusa.

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}, \text{ aleshores, } h = \frac{2S}{c}, \text{ } ab = 2S.$$

$$S = \frac{a+b+c}{2}r, \text{ on } r \text{ es el radi de la circumferència inscrita. Aleshores, } a+b+c = \frac{2S}{r}.$$

$$\text{En un triangle rectangle } r = \frac{a+b-c}{2}.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h} = 1$$

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{1}{h} = 1$$

$$\frac{a+b}{2S} + \frac{c}{2S} = 1$$

$$a+b+c = 2S$$

$$\frac{2S}{r} = 2S, \text{ aleshores, } r = 1.$$

$$\frac{a+b-c}{2} = 1.$$

$$a+b-c = 2.$$

$$c = a+b-2.$$

$$a+b = c+2.$$

Elevant al quadrat:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 4 + c^2 + 4c. \text{ Simplificant:}$$

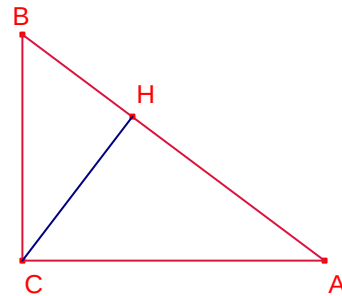
$$ab = 2 + 2c$$

$$ab = 2 + 2(a+b-2)$$

$$ab = 2a + 2b - 2.$$

$$b = \frac{2a-2}{a-2} = 2 + \frac{2}{a-2}, \text{ } a, b \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Aleshores. } \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}, \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}, \text{ en aquests casos el triangle és Pitagòric.}$$



Determineu els parells (a, b) de nombres enters positius pels quals $\frac{a+1}{b}$ i $\frac{b+2}{a}$ són enters positius.

Crux Mathematicorum M391

Solució

$$\frac{a+1}{b} \in \mathbb{N}, \text{ aleshores, } b \leq a+1 \quad (1)$$

$$\frac{b+2}{a} \in \mathbb{N}, \text{ aleshores, } a \leq b+2 \quad (2)$$

De les expressions (1) (2):

$$a-2 \leq b \leq a+1, \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Aleshores, $b = a-2$, $b = a-1$, $b = a$, o bé, $b = a+1$.

Suposem $b = a-2$,

$$\frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2} \in \mathbb{N}. \text{ Aleshores, } a = 3 \text{ o bé } a = 5$$

$$\text{Les solucions són: } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Suposem que $b = a-1$.

$$\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \in \mathbb{N}, \quad \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \in \mathbb{N}$$

Aquest nombres no poden ser naturals.

Suposem que $b = a$.

$$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \in \mathbb{N} \quad \frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \in \mathbb{N}. \text{ Aleshores, } a = 1.$$

$$\text{La solució és } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Suposem que $b = a+1$.

$$\frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \in \mathbb{N}. \text{ Aleshores, } a = 1 \text{ o bé } a = 3.$$

$$\text{Les solucions són: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}.$$

En la figura següent, els cercles menuts tenen radis a , b i són tangents al cercle gran de radi r en els punts P i Q . Les circumferències menudes s'intersecten en S i T .
Proveu que si P , S , Q estan alineats aleshores, $r = a + b$
Crux Mathematicorum M393.

Solució:

Siga O el centre de la circumferència de radi r .

Siga O_1 el centre de la circumferència de radi a

Siga O_2 el centre de la circumferència de radi b .

Siga $x = \overline{PS}$, $y = \overline{SQ}$.

El triangle $\triangle OPQ$ és isòsceles.

Per ser las circumferències tangents O_1 pertany al segment $\overline{OP}$.

Per ser las circumferències tangents O_2 pertany al segment $\overline{OQ}$.

Els triangles $\triangle OPQ$, $\triangle O_1PS$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{x} = \frac{r}{x+y} \quad (1)$$

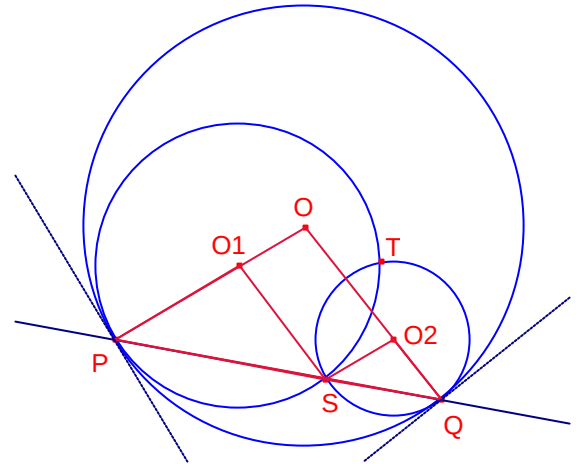
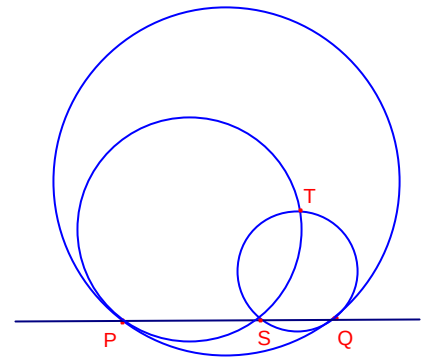
Els triangles $\triangle OPQ$, $\triangle O_2SQ$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{y} = \frac{r}{x+y} \quad (2)$$

De (1) i (2)

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{r}{x+y}, \text{ per tant, } \frac{a+b}{x+y} = \frac{r}{x+y}.$$

Aleshores, $a + b = r$



Els nombres a , b , c , d i e són cinc enters consecutius. Demostreu que la diferència entre la mitjana dels quadrats de c i e i la dels quadrats de a i c és igual a quatre vegades c .

Crux Mathematicorum M394

Solució:

Siga $a = c - 2$, $b = c - 1$, c , $d = c + 1$, $e = c + 2$, cinc enters consecutius.

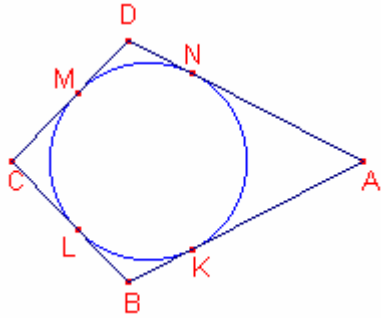
$$\begin{aligned}\frac{c^2 + e^2}{2} - \frac{a^2 + c^2}{2} &= \frac{c^2 + (c+2)^2}{2} - \frac{(c-2)^2 + c^2}{2} = \\ &= \frac{2c^2 + 4c + 4}{2} - \frac{2c^2 - 4c + 4}{2} = \\ &= 4c.\end{aligned}$$

El quadrilàter ABCD és tal que els seus costats són tangents a un cercle donat com el de la figura.

Si $\overline{AB} = \overline{AD}$, demostreu que $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Crux Mathematicorum M395.

Solució:

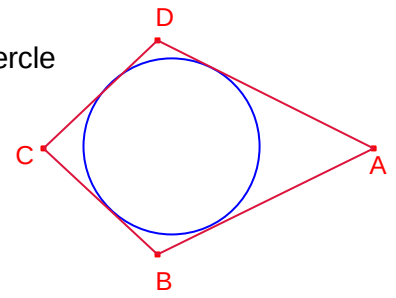


Siga K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència amb els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivament.

$$\overline{AK} = \overline{AN}, \overline{BK} = \overline{BL}, \overline{CL} = \overline{CM}, \overline{DM} = \overline{DN}.$$

Com $\overline{AB} = \overline{AD}$ y $\overline{AK} = \overline{AN}$ aleshores, $\overline{BK} = \overline{DN}$.

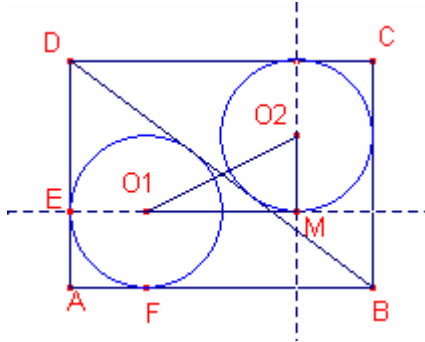
$$\overline{BC} = \overline{BL} + \overline{CL} = \overline{BK} + \overline{CM} = \overline{DN} + \overline{CM} = \overline{DM} + \overline{CM} = \overline{CD}.$$



En un rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = 8$ i $\overline{BC} = 6$ s'han inscrit dos cercles de centres O_1 i O_2 en els triangles $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$, respectivament. Determineu la distància entre O_1 i O_2 .

Crux Mathematicorum M396.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{BD} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\triangle ABD$ és:

$$r = \overline{O_1E} = \overline{O_1F} = \frac{-\overline{BD} + \overline{AB} + \overline{AD}}{2} = \frac{-10 + 8 + 6}{2} = 2.$$

El triangle rectangle $\triangle CDB$ és igual al triangle $\triangle ABD$, per tant tenen igual radi de la circumferència inscrita.

Tracem la recta perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa pel punt O_2 i la recta perpendicular al costat $\overline{BC}$ que passa pel punt O_1 . Les dues rectes es tallen en el punt M.

Considerem el triangle rectangle $\triangle O_1MO_2$.

$$\overline{O_1M} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{O_1E} = 4, \quad \overline{O_2M} = \overline{AD} - 2 \cdot \overline{O_1F} = 2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle O_1MO_2$:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Determineu tots els parells (x,y) d'enters tals que

$$x^4 - x + 1 = y^2.$$

Crux Mathematicorum M397

Solució:

Si $x = 0$ aleshores $y = 1, -1$. Per tant $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ són solucions.

Si $x = 1$ aleshores $y = 1, -1$. Per tant $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ són solucions.

Si $x = -1$ aleshores $y = \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$.

$x^4 - x + 1$ es imparell per a tot $x \in \mathbb{Z}$. Aleshores $y = 0$ no es solució.

Si $y = 1$ aleshores $x = 0, 1$, per tant $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ són solucions.

Si $y = -1$ aleshores $x = 0, 1$, per tant $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ són solucions.

$$x^4 - y^2 = x - 1.$$

$$(x^2 + y)(x^2 - y) = x - 1.$$

Suposem que $x > 1$, $y > 1$ és solució.

$$x - 1 > 0, \quad x^2 + y > 0.$$

$$x^2 + y \text{ divideix a } x - 1, \text{ per tant, } x^2 + y \leq x - 1.$$

$x^2 - x + 1 + y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 - x + 1 + y$ és una paràbola còncaua i el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(y + 1) < 0$.

Suposem $x > 1$, $y < -1$ és solució.

$$x - 1 > 0, \quad x^2 - y > 0.$$

$$x^2 - y \text{ divideix a } x - 1, \text{ per tant, } x^2 - y \leq x - 1.$$

$x^2 - x + 1 - y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 - x + 1 - y$ és una paràbola còncaua el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(y - 1) < 0$.

Suposem $x < -1$, $y > 1$ és solució.

$$x - 1 < 0, \quad 1 - x > 0, \quad x^2 + y > 0.$$

$$x^2 + y \text{ divideix a } 1 - x, \text{ per tant, } x^2 + y \leq 1 - x.$$

$x^2 + x - 1 + y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 + x - 1 + y$ és una paràbola còncaua el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(y - 1) < 0$.

Suposem $x < -1$, $y < -1$ és solució.

$$x - 1 < 0, \quad 1 - x > 0, \quad x^2 - y > 0.$$

$$x^2 - y \text{ divideix a } 1 - x, \text{ per tant, } x^2 - y \leq 1 - x.$$

$x^2 + x - 1 - y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 + x - 1 - y$ és una paràbola còncaua el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(-y - 1) < 0$.

Per tant les solucions enteres de l'equació són:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

a) Siguen r , s i t les arrels de l'equació cúbica $w^3 - bw^2 + cw - d = 0$.

Determineu b , c i d en termes de r , s i t .

b) Suposem que a és un nombre real. Determineu totes les solucions del sistema d'equacions

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = -1 \\ xyz = -a \end{cases}$$

Crux mathematicorum M398.

Solució:

a)

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$$-(r + s + t) = -b$$

$$rs + st + tr = c$$

$$-rst = -d$$

Per tant:

$$b = r + s + t$$

$$c = rs + st + tr$$

$$d = rst$$

b)

Aplicant l'apartat a)

x, y, z són les solucions de l'equació cúbica: $w^3 - a \cdot w^2 - z + a = 0$.

Aplicant la regla de Ruffini les solucions de l'equació són:

$$w = 1, w = -1, w = a.$$

Les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1, \\ z = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = a, \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1, \\ z = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = a, \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ y = 1, \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ y = -1, \\ z = 1 \end{cases}.$$

Determineu les ternes (a,b,c) d'enters positius tal que $\frac{3ab-1}{abc+1}$ siga un enter positiu.

Crux Mathematicorum M399.

Solució:

$3ab-1 > 0$, $abc+1 > 0$, $\frac{3ab-1}{abc+1} \in \mathbb{N}$, aleshores:

$$3ab-1 \geq abc+1$$

$$ab(3-c) \geq 2.$$

Per tant, $3-c > 0$, aleshores, $c < 3$, $c \in \mathbb{N}$.

Aleshores $c = 1, 2$

Suposem que $c = 1$

$$\frac{3ab-1}{abc+1} = \frac{3ab-1}{ab+1} = n \in \mathbb{N}$$

Aleshores, $3ab-1 = nab+n$.

$$(3-n)ab = n+1.$$

$$ab = \frac{n+1}{3-n} \in \mathbb{N}. \text{ Per tant, } n < 3.$$

Si $n = 1$, aleshores, $ab = \frac{1+1}{3-1} = 1$, per tant, $a = b = 1$.

$$\text{La solució és } \begin{cases} a=1 \\ b=1. \\ c=1 \end{cases}$$

Si $n = 2$, aleshores, $ab = \frac{2+1}{3-2} = 3$, per tant, $a = 1, b = 3$ o bé $a = 3, b = 1$

$$\text{Les solucions són } \begin{cases} a=1 \\ b=3, \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=1. \\ c=1 \end{cases}$$

Suposem que $c = 2$

$$\frac{3ab-1}{abc+1} = \frac{3ab-1}{2ab+1} = n \in \mathbb{N}$$

Aleshores, $3ab-1 = 2nab+n$.

$$(3-2n)ab = n+1.$$

$$ab = \frac{n+1}{3-2n} \in \mathbb{N}. \text{ Per tant, } n < \frac{3}{2}. \text{ Aleshores } n = 1. \text{ Aleshores:}$$

$$ab = \frac{1+1}{3-2} = 2, \text{ per tant, } a = 1, b = 2 \text{ o bé } a = 2, b = 1$$

$$\text{Leas solucions són } \begin{cases} a=1 \\ b=2, \\ c=2 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=1. \\ c=2 \end{cases}$$

Per tant el problema té 5 solucions:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1, \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=1 \\ b=3, \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=1, \\ c=1 \end{cases}, \begin{cases} a=1 \\ b=2, \\ c=2 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=1. \\ c=2 \end{cases}$$

Els antics egipcis escrivien les fraccions en termes de fraccions unitàries distintes, és a dir, fraccions distintes amb 1 com a numerador. Per exemple, per escriure $\frac{11}{12}$ haurien escrit $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. La fracció unitària $\frac{1}{2}$ pot ser escrita amb altres fraccions unitàries com $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Trobeu una família infinita de fraccions unitàries, cadascuna que pugui ser escrita com suma de dues fraccions unitàries.
Crux Mathematicorum Totten-M1.

Solució:

$$\text{Siga } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad a, b, c \in \mathbb{N} \sim \{1\}.$$

Aleshores, $b, c > a$.

$$\frac{bc}{abc} = \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc}.$$

$$bc = ab + ac.$$

$$b(c - a) = ac.$$

$$b = \frac{ac}{c - a}.$$

Si $c = a + 1$, aleshores, $b = a(a + 1)$

Aleshores, $\frac{1}{a} = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a+1}$. I a més a més, $a(a+1) \neq a+1$, ja que $a > 1$.

Per tant, qualsevol fracció $\frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{N} \sim \{1\}$ és una família infinita de fraccions unitàries

que és suma de dues fraccions unitàries distintes $\frac{1}{a(a+1)}, \frac{1}{a+1}$.

Solució 2:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}. \text{ Siga } n \in \mathbb{N}.$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right).$$

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Siga $\frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ és una família infinita de fraccions unitàries tal que és suma de dues

fraccions unitàries distintes, $\frac{1}{3n}, \frac{1}{6n}$.

Solució:

A diagram of a circle with a horizontal diameter. The left endpoint of the diameter is labeled 'C' in red. The right endpoint is unlabeled. A vertical line segment, representing the perpendicular bisector of the diameter, passes through the center of the circle. The top endpoint of this vertical segment is labeled 'B' in red, and the bottom endpoint is labeled 'A' in red. A blue arc connects points B and A, passing through the right side of the circle. The region bounded by the vertical line segment AB and the blue arc is shaded with red horizontal lines. The text 'c de la' is to the left of the circle, and 'de la' and 'Δ BC,' are below it.

$$\overline{CA} = \overline{CB} = R\sqrt{2}.$$
$$S = \frac{(R\sqrt{2})^2}{2}.$$
$$S = \frac{1}{4} \pi (R\sqrt{2})^2.$$
$$S_v = \frac{1}{2} \pi R^2 - \left(\frac{1}{4} \pi (R\sqrt{2})^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{2} \right) = R^2.$$
$$\frac{S_v}{S_T} = \frac{R^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{\pi}.$$

Demostreu que l'equació quadràtica $ax^2 + bx + c = 0$ no té solució racional si a , b , i c són enters imparells.

Crux Mathematicorum Totten-M3.

Solució:

Siguen $a = 2p + 1$, $b = 2q + 1$, $c = 2r + 1$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

Per a que l'equació tinga solució racional el discriminant ha de ser un quadrat perfecte. El discriminant és:

$$\Delta = (2q + 1)^2 - 4(2p + 1)(2r + 1).$$

Notem que el discriminant és imparell, aleshores, el discriminant ha de ser el quadrat perfecte d'un nombre enter imparell:

$$(2q + 1)^2 - 4(2p + 1)(2r + 1) = (2s + 1)^2, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Simplificant:

$$4q^2 + 4q + 1 - 4(4pr + 1 + 2p + 2r) = 4s^2 + 4s + 1.$$

$$4q^2 + 4q - 4(4pr + 1 + 2p + 2r) = 4s^2 + 4s.$$

$$q^2 + q - (4pr + 1 + 2p + 2r) = s^2 + s.$$

$$q(q + 1) + 2(-2pr - p - q) - 1 = s(s + 1).$$

$q(q + 1)$, $s(s + 1)$ són parells.

$q(q + 1) + 2(-2pr + p + q) - 1$ és imparell i $s(s + 1)$ és parell, la qual cosa és un absurd.

En un sondeig es demana a certs estudiants si estimen el color taronja. Dels xics, exactament el 2% ha respost que sí, mentre que les xiques la proporció exacta de sí ha estat el 59%. En el total d'enquestats, exactament el 17% de les respostes han dit que estimaven el color taronja. Es demana de trobar el més petit nombre possible de participants en el sondeig.

Crux Mathematicorum. Totten-M4.

Solució:

Siga x el nombre de xics.

Siga y el nombre de xiques.

El nombre de xiques que els agrada el taronja és

$\frac{59}{100}y$. Aleshores, 100 divideix a y .

El nombre total d'enquestats que els agrada el taronja és:

$\frac{17}{100}(x + y)$, aleshores, 100 divideix a $x + y$

Per tant, 100 divideix a x .

El nombre total d'enquestats que els agrada el taronja és:

$\frac{2}{100}x + \frac{59}{100}y$.

$$\text{Aleshores, } \frac{2}{100}x + \frac{59}{100}y = \frac{17}{100}(x + y) \quad (1)$$

$$2x + 59y = 17x + 17y.$$

$$5x = 42y$$

Aleshores, 14 divideix a x , 5 divideix a y .

$\text{mcm}(14, 100) = 700$ divideix a x .

$\text{mcm}(5, 100) = 100$ divideix a y .

Aleshores, $x = 700m$, $y = 100n$.

Substituint en l'expressió (1)

$$\frac{2}{100}700m + \frac{59}{100}100n = \frac{17}{100}(700m + 100n)$$

$$5m = 2n.$$

Aleshores, 2 divideix a m . 5 divideix a n .

Aleshores, $m = 2p$, $n = 5q$.

Per tant, $x = 1400p$, $y = 500q$.

El nombre mínim d'enquestats és 1900.

Siga $a \neq 1$ un nombre real positiu. Determineu tots els parells d'enters positius (x, y) tals que $\log_a x - \log_a y = \log_a (x - y)$.
Crux Mathematicorum. Totten-M5.

Solució:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x - y).$$

$$x - y > 0.$$

$$x > y \geq 1.$$

Aplicant propietats de logaritmes:

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a (x - y).$$

$$\frac{x}{y} = x - y \in \mathbb{N}.$$

Aleshores, y divideix x .

Per tant, $x = k \cdot y$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

$$\frac{ky}{y} = ky - y.$$

$$k = (k - 1)y.$$

$$y = \frac{k}{k - 1} = 1 + \frac{1}{k - 1} \in \mathbb{N}.$$

Aleshores, $k - 1 = 1$.

$$k = 2.$$

$$y = 2 \text{ i } x = 4.$$

Un tren de 900m de longitud s'apropa a un pont de longitud 100m a una velocitat de 90km/h.

a) En quants segons travessarà el pont?

b) Suposem que en el moment d'arribar al pont, el tren desaccelera 0.2m/s^2 . Quant de temps trigarà aquesta vegada en travessar el pont?.

Crux Mathematicorum. Totten-M9.

Solució:

$$90\text{km/h} = 25\text{m/s}$$

a)

L'equació del moviment uniforme és:

$$e(t) = 25t, \text{ e(t) metres, t segons.}$$

L'instant $t = 0$ el cap del tren es troba en el començament del pont.

El tren haurà travessat el pont quan el cap del tren es trobe a $900 + 100 = 1000\text{m}$ del començament del pont.

$$e(t) = 1000.$$

$$25t = 1000. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$t = 40\text{s}.$$

b)

L'equació del moviment uniforme accelerat és:

$$e(t) = 25t - \frac{1}{2}0.2t^2, \text{ e(t) metres, t segons.}$$

L'instant $t = 0$ el cap del tren es troba en el començament del pont.

El tren haurà travessat el pont quan el cap del tren es trobe a $900 + 100 = 1000\text{m}$ del començament del pont.

$$e(t) = 1000.$$

$$25t - \frac{1}{2}0.2t^2 = 1000. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$t = 50\text{m}.$$

Volem construir un camp de gespa i vegem que si la fem 8 més ampla i 9 metres més estreta l'àrea és la mateixa i si la fem 12 metres més curta i 16 més llarga, l'àrea és la mateixa.

Calculeu les dimensions del camp de gespa.

Crux Mathematicorum M401.

Solució:

Siguen x , y les dimensions inicials de la gespa.

Si la fem 8 metres més ampla i 9 metres més estreta, l'àrea és la mateixa:

$$xy = (x + 9)(y - 8) \quad (1)$$

Si fem 12 metres més curta i 16 més llarga, l'àrea és la mateixa:

$$xy = (x - 12)(y + 16) \quad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) i (2):

$$\begin{cases} xy = (x + 9)(y - 8) \\ xy = (x - 12)(y + 16) \end{cases} \text{ simplificant:}$$
$$\begin{cases} -8x + 9y = 73 \\ 16x - 12y = 193 \end{cases} \text{ . Resolent el sistema:}$$
$$\begin{cases} x = \frac{871}{16} \text{ m} \\ y = \frac{113}{2} \text{ m} \end{cases} \text{ .}$$

Les dimensions de la gespa són $\frac{871}{16} \text{ m} \times \frac{113}{2} \text{ m} = \frac{98423}{32} \text{ m}^2$.

Determineu les solucions enteres de l'equació:

$$a^b b^a + a^b + b^a = 89.$$

Crux Mathematicorum M402.

Solució:

Notem que $a, b \neq 0$.

Ja que si $a = 0$, tindríem que $0^b b^0 + 0^b + b^0 = 89$, d'on $1 = 89$.

$$a^b b^a + a^b + b^a = 89.$$

$$a^b (b^a + 1) + b^a + 1 = 90.$$

$$(a^b + 1)(b^a + 1) = 90. \text{ Per tant, } a^b + 1 \in \mathbb{Z} \sim \{0\}, b^a + 1 \in \mathbb{Z} \sim \{0\}$$

Aleshores, $a^b + 1$, $b^a + 1$ són del mateix signe.

Suposem que $a^b + 1 < 0$ i $b^a + 1 < 0$

De la primera igualtat:

$$a^b < -1, \text{ aleshores, } a \leq -1$$

Per tant, $b^a \in \mathbb{Q} \sim \mathbb{Z}$, $b^a + 1 \in \mathbb{Z} \sim \{0\}$, la qual cosa és absurda.

Per tant, $a^b + 1 > 0$ i $b^a + 1 > 0$.

Les possibilitats dels factors són:

$$\begin{cases} a^b + 1 = 2 \\ b^a + 1 = 45 \end{cases}, \begin{cases} a^b = 1 \\ b^a = 44 \end{cases}, \text{ la solució del qual és } \begin{cases} a = 1 \\ b = 44 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 45 \\ b^a + 1 = 2 \end{cases}, \text{ la solució del qual és } \begin{cases} a = 44 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 3 \\ b^a + 1 = 30 \end{cases}, \begin{cases} a^b = 2 \\ b^a = 29 \end{cases} \text{ que no té solució.}$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 30 \\ b^a + 1 = 3 \end{cases} \text{ no té solució.}$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 5 \\ b^a + 1 = 18 \end{cases}, \begin{cases} a^b = 4 \\ b^a = 18 \end{cases} \text{ que no té solució.}$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 18 \\ b^a + 1 = 5 \end{cases} \text{ no té solució.}$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 6 \\ b^a + 1 = 15 \end{cases}, \begin{cases} a^b = 5 \\ b^a = 14 \end{cases} \text{ que no té solució.}$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 15 \\ b^a + 1 = 6 \end{cases} \text{ no té solució.}$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 9 \\ b^a + 1 = 10 \end{cases}, \begin{cases} a^b = 8 \\ b^a = 9 \end{cases}, \text{ la solució del qual és } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} a^b + 1 = 10 \\ b^a + 1 = 9 \end{cases}, \text{ la solució del qual és } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Per tant, les solucions enteres de l'equació són:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 44 \end{cases}, \begin{cases} a = 44 \\ b = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Joan ha escrit un programa en l'ordinador per a provar si un enter major que 1 és un nombre primer. La seua astuta germana Alícia, ha editat el codi i ha trobat que si l'enter és imparell, la probabilitat que el programa done resposta correcta és del 52% i si l'entrada és parella, la probabilitat és del 98%. Joan verifica el programa provant dos enters més grans que 1 escollits a l'atzar. Quina és la probabilitat que les dues respostes siguin correctes.

Crux Mathematicorum M403

Solució:

Siga el succés T = El programa encerta el dos nombres.

A_{11} = el primer nombre escollit és imparell i el segon imparell.

A_{12} = el primer nombre escollit és imparell i el segon parell.

A_{21} = el primer nombre escollit és parell i el segon imparell.

A_{22} = el primer nombre escollit és parell i el segon parell.

La intersecció dos a dos dels successos anteriors és el succés impossible.

La unió dels quatre successos anterior és l'espai mostral.

Aplicant el teorema de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(T) &= \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} P(T | A_{ij}) \cdot P(A_{ij}) = \\ &= P(T | A_{11}) \cdot P(A_{11}) + P(T | A_{12}) \cdot P(A_{12}) + P(T | A_{21}) \cdot P(A_{21}) + P(T | A_{22}) \cdot P(A_{22}) = \\ &= \left(\frac{52}{100}\right)^2 \frac{1}{4} + \frac{52}{100} \cdot \frac{98}{100} \frac{1}{4} + \frac{98}{100} \cdot \frac{52}{100} \frac{1}{4} + \left(\frac{98}{100}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Aleshores, la probabilitat que les dues respostes siguin correctes és de 56.25%.

Determineu una fórmula que done el valor de la suma

$$S = 17 + 187 + 1887 + 18887 + \dots + 188\dots87$$

on el darrer terme conté exactament n xifres 8.

Crux Mathematicorum M405.

Solució de Ricard Peiró i Estruch. IES "Abastos". València. Spain.

$$\text{Siga } S = 17 + 187 + 1887 + 18887 + \dots + 188\dots87$$

$$S = 10 + 10^2 + \dots + 10^{n+1} + 7(n+1) + 80(1 + 11 + \dots + 1\dots\dots1)$$

$$10 + 10^2 + \dots + 10^{n+1} = \frac{10 - 10^{n+2}}{1 - 10} = \frac{10}{9}(10^{n+1} - 1).$$

$$\text{Siga } T = 1 + 11 + 111\dots + 1\dots\dots1.$$

$$10T = 10 + 110 + 1110 + \dots + 1\dots\dots10.$$

Restant les dues expressions:

$$-9T = 1 + \left(1 + 1 + \dots + 1\right)^{(n-1)} - (10 + \dots + 10^n).$$

$$-9T = n - \frac{10 - 10^{n+1}}{1 - 10}.$$

$$-9T = n + \frac{10}{9}(1 - 10^n).$$

$$T = \frac{-n}{9} + \frac{10}{9^2}(10^n - 1).$$

Aleshores:

$$S = \frac{10}{9}(10^{n+1} - 1) + 7(n+1) + 80\left(\frac{-n}{9} + \frac{10}{9^2}(10^n - 1)\right).$$

El quadrat ABCD està inscrit en la vuitena part d'un cercle de radi 1 i centre O, de manera que té un vèrtex en cada radi i els altres vèrtex B, C sobre l'arc. El quadrat

EFGH està inscrit en el triangle $\triangle DOA$ de manera que E i H estan sobre els radis i F i G sobre el segment $\overline{AD}$, del problema M295 sabem que l'àrea del quadrat ABCD és

$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. Determineu l'àrea del quadrat EFGH.

Crux Mathematicorum M406.

Solució:

Pel problema 295:

$$\angle AOD = 45^\circ. S_{ABCD} = \overline{AD}^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Sabem que, } \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Siga $x = \overline{EF} = \overline{FG}$ costats del quadrat EFGH.

$$\overline{AF} = \frac{\overline{AD} - x}{2}, \angle FEA = \frac{45^\circ}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle EFA$:

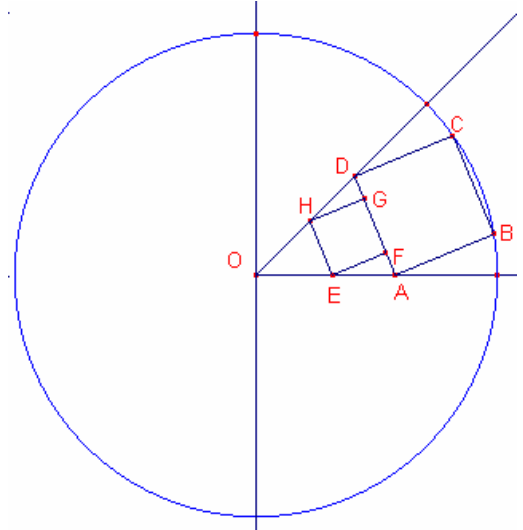
$$\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}}$$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{\overline{AD} - x}{2x}. \text{ Resolent l'equació en } x:$$

$$x = \frac{\overline{AD}}{2\sqrt{2} - 1}.$$

L'àrea del quadrat EFGH és:

$$S_{EFGH} = x^2 = \frac{\overline{AD}^2}{(2\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{3}}{9 - 4\sqrt{2}} = \frac{10 - \sqrt{2}}{147}.$$



Decidiu si el quadrat del costat és un quadrat màgic 4×4 utilitzant els enters de 1 a 16. (En un quadrat màgic, la suma dels nombres de cada fila, cada columna i cada diagonal són iguals).

			12
	16	1	10
	2	15	8

Crux Mathematicorum M407

Solució:

La suma de tots els nombres del quadrat màgic és:

$1 + 2 + \dots + 16$ suma dels 16 termes d'una progressió aritmètica de primer terme 1 i raó 1.

$$S = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136.$$

La suma de cada fila columna y cada diagonal és:

$$\frac{136}{4} = 34.$$

Completant les files, columnes i diagonal, trivials:

		13	4
		5	12
7	16	1	10
9	2	15	8

Per completar el quadrat ens resten el nombres 3, 6, 11, 14.

La diagonal principal Ha de sumar 34, l'única possibilitat és que estiga ocupada pels nombres 11 i 14.

Una vegada ocupats aquests nombres, en cap cas las columnes 1 i 2 la seua suma no seria 34.

Aleshores no es pot construir el quadrat màgic.

Determineu tots els enters positius $\underline{abc}$ que satisfan l'equació $\underline{abc} = \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{ca}$. (On designem $\underline{abc}$ l'enter de tres xifres tal que la xifra de les centenes és a, la xifra de les desenes és b i la xifra de les unitats és c.

Crux Mathematicorum M408

Solució:

$$\underline{abc} = \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{ca}.$$

$$\underline{abc} = 100a + 10b + c, \quad \underline{ab} = 10a + b, \quad \underline{bc} = 10b + c, \quad \underline{ca} = 10c + a.$$

Aleshores:

$$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + c + 10c + a. \text{ Simplificant:}$$

$$89a = 10c + b \quad (1)$$

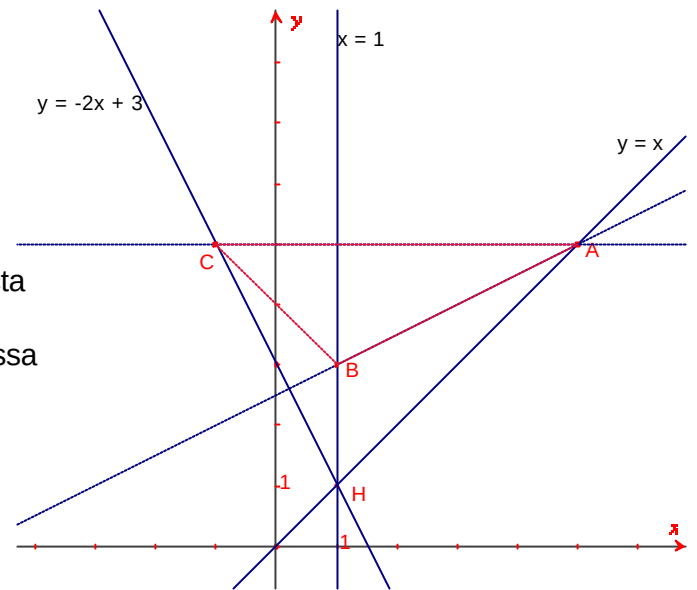
$$89a = 10c + b \leq 10 \cdot 9 + 9 = 99.$$

$$\text{Aleshores, } 89a \leq 99. \text{ Per tant } a = 1 \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$10c + b = 89, \text{ per tant, } c = 8, b = 9.$$

El nombre cercat és 198.



Un cub d'aresta a , un tetraedre regular d'aresta b i un octaedre regular d'aresta c tenen la mateixa superfície. Calculeu el valor de $\frac{\sqrt{bc}}{a}$.

Crux Mathematicorum M410

Solució:

Les superfícies dels tres cossos són:

$$S_{\text{cub}} = 6a^2, S_{\text{tetraedre}} = b^2\sqrt{3}, S_{\text{octaedre}} = 2c^2\sqrt{3}.$$

Com les tres superfícies són iguals:

$$6a^2 = b^2\sqrt{3} = 2c^2\sqrt{3}.$$

$$b^2\sqrt{3} \cdot 2c^2\sqrt{3} = (6a^2)^2.$$

$$(bc)^2 = 6a^4.$$

$$\left(\frac{bc}{a^2}\right)^2 = 6$$

$$\frac{bc}{a^2} = \sqrt{6}.$$

Aleshores:

$$\frac{\sqrt{bc}}{a} = \sqrt{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6}.$$

Siguen a, b, c els costats d'un triangle $\triangle ABC$.

Si $2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20$, demostreu que el triangle és rectangle.

Crux Mathematicorum M411.

Solució.

Notem que $a, b, c > 1$.

$$2a + 3b + 4c = 4\sqrt{2a-2} + 6\sqrt{3b-3} + 8\sqrt{4c-4} - 20$$

$$2a + 3b + 4c - 4\sqrt{2a-2} - 6\sqrt{3b-3} - 8\sqrt{4c-4} + 20 = 0$$

$$(\sqrt{2a-2} - 2)^2 + (\sqrt{3b-3} - 3)^2 + (\sqrt{4c-4} - 4)^2 = 0$$

La suma de tres nombres positius és zero aleshores:

$$\sqrt{2a-2} - 2 = 0, \sqrt{3b-3} - 3 = 0, \sqrt{4c-4} - 4 = 0.$$

Resolent les tres equacions:

$$a = 3, b = 4, c = 5.$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Per tant a, b, c formen els costats d'un triangle rectangle d'hipotenusa c .

Si x és un nombre real, designem $[x]$ part entera de x és igual a l'enter més petit o igual a x , i designem $\{x\}$ part decimal de x com $\{x\} = x - [x]$. Determineu tots els nombres reals x tal que $[x] \cdot \{x\} = x$.

Crux Mathematicorum M412.

Solució:

Siga $x = 0$.

$$[0] = 0, \{0\} = 0.$$

$$[0] \cdot \{0\} = 0. \text{ Aleshores } x = 0, \text{ és solució.}$$

Siga $x = n \in \mathbb{N}$.

$$[n] = n, \{n\} = 0.$$

$$[n] \cdot \{n\} = 0 \neq n. \text{ Aleshores si } x = n, \text{ l'equació no té solució.}$$

$$[-n] = -n, \{-n\} = 0.$$

$$[-n] \cdot \{-n\} = 0 \neq -n. \text{ Aleshores si } x = -n, \text{ l'equació no té solució.}$$

Siga $x \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}$.

$$[x] = n-1, \{x\} = x - (n-1).$$

Vegem si l'equació $[x] \cdot \{x\} = x$ té solució.

$$(n-1) \cdot (x - (n-1)) = x.$$

$$x = \frac{(n-1)^2}{n-2} \notin]n-1, n[.$$

Aleshores si $x \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}$ l'equació no té solució.

Siga $x \in]-n, -n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.

$$[x] = -n, \{x\} = x + n.$$

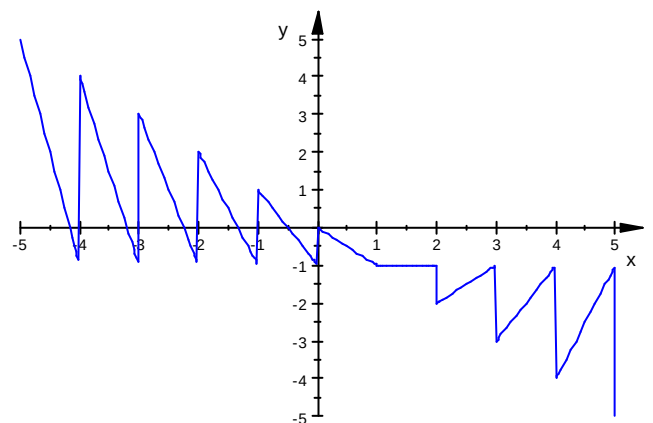
Vegem si l'equació $[x] \cdot \{x\} = x$ té solució.

$$-n \cdot (x + n) = x.$$

$$x = \frac{-n^2}{n+1} \in]-n, -n+1[.$$

Aleshores les solucions són:

$$x = 0, x = \frac{-n^2}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}.$$



$$f(x) = [x] \cdot \{x\} - x$$

Determineu els nombres naturals de tres xifres tal que el producte de les 3 xifres siga 36.

Crux Mathematicorum M413

Solució:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2.$$

Les 3 xifres el producte de les quals es 36 són:

Xifres	Total de nombres
1, 4, 9	6
1, 6, 6	3
2, 2, 9	3
2, 3, 6	6
3, 3, 4	3

Total de nombres de 3 xifres el producte de les quals és 36 és 21.

Considerem la llista de naturals, ordenada en orde creixent, que poden ser expressats com la suma de 21 nombres enters consecutius (no necessàriament positius).
Determineu el que ocupa la posició 21ena d'aquesta llista.
Crux Mathematicorum M414.

Solució:

Siga $n \in \mathbb{N}$ un dels nombres números d'aquest conjunt:

$$n = a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 20), \quad a \in \mathbb{Z}.$$

$$n = 21a + 1 + 2 + 3 + \dots + 20.$$

$$n = 21a + \frac{(1 + 20)20}{2}.$$

$$n = 21a + 210.$$

$$n - 21a = 210.$$

Considerem l'equació diofàntica:

$$n - 21a = 1$$

Una solució de l'equació és $\begin{cases} n = 1 \\ a = 0 \end{cases}$.

La solució de l'equació diofàntica $n - 21a = 210$ és:

$$\begin{cases} n = 1 \cdot 210 + 21t \\ a = 0 \cdot 210 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} n = 210 + 21t \\ a = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com n és natural $210 + 21t > 0$.

$$t > -10.$$

$$t \geq -9.$$

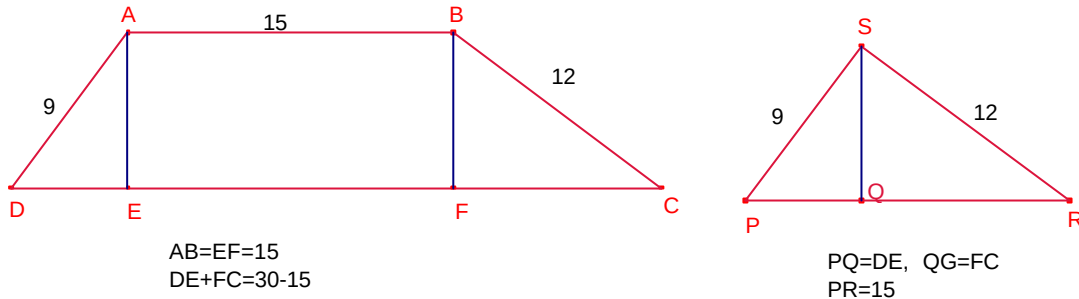
El primer s'assoleix quan $t = -9$.

El que ocupa el lloc 21 s'assoleix quan $t = 11$.

$$n = 210 + 21 \cdot 11 = 21^2 = 441.$$

Els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ d'un trapezi ABCD són paral·lels. Si $\overline{AB} = 15$, $\overline{CD} = 30$, $\overline{AD} = 9$ i $\overline{BC} = 12$, determineu l'àrea del trapezi ABCD.
Crux Mathematicorum M415.

Solució:



Siga $h = \overline{AE}$ l'altura del trapezi.
L'àrea del trapezi ABCD és igual a:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \cdot \overline{AE} = \frac{45h}{2}.$$

$$S_{ABC} = S_{ADA} + S_{ABFE} + S_{FCB} = S_{PRS} + S_{ABFE}.$$

Notem que el triangle $\triangle PRS$ es rectangle ja que $\overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{RS}^2$, $15^2 = 9^2 + 12^2$.

l'altura $\overline{SQ} = \overline{AE} = h$ del triangle $\triangle PRS$.

$$S_{PRS} = \frac{\overline{PS} \cdot \overline{RS}}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54.$$

$$S_{PRS} = \frac{\overline{PR} \cdot \overline{SQ}}{2} = \frac{15 \cdot h}{2}.$$

Igalant les àrees:

$$\frac{15h}{2} = 54. \text{ Per tant, l'altura del trapezi és: } h = \frac{36}{5}.$$

Aleshores, l'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{45h}{2} = \frac{45}{2} \cdot \frac{36}{5} = 162.$$

Solució 2:

Siga $x = \overline{FC}$, $h = \overline{AE} = \overline{BF}$.

Aleshores, $\overline{EF} = 15$, $\overline{DE} = 15 - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\triangle DEA$, $\triangle CFB$:

$$\begin{cases} h^2 + (15 - x)^2 = 9^2 \\ x^2 + h^2 = 12^2 \end{cases}, \text{ la solució del sistema és } \begin{cases} x = \frac{48}{5} \\ h = \frac{36}{5} \end{cases}.$$

$$\text{L'àrea del trapezi és: } S_{ABCD} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \cdot \overline{AE} = \frac{30 + 15}{2} \cdot \frac{36}{5} = 162.$$

Demostreu que $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ és divisible per 9 per a tot enter no negatiu.

Crux Mathematicorum M416

Solució:

Demostrem la proposició pel mètode d'inducció.

Si $n = 0$.

$$10^0 + 3 \cdot 4^2 + 5 \equiv 54 \pmod{9} \equiv 0 \pmod{9}.$$

Suposem que per a $n = k$ la proposició és certa:

$$10^k + 3(4^{k+2}) + 5 \equiv 0 \pmod{9}.$$

$$10^k + 5 \equiv 6 \pmod{9}.$$

$$\text{Aleshores } 3(4^{k+2}) \equiv -6 \pmod{9} \equiv 3 \pmod{9} \quad (1)$$

Vegem que la proposició s'acompleix per a $n = k + 1$.

$$10^{k+1} + 3(4^{k+1+2}) + 5 \equiv 10^{k+1} + 5 + 4 \cdot 3 \cdot 4^{k+2} \pmod{9}.$$

$$10^{k+1} + 5 \equiv 6 \pmod{9}.$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció (1):

$$10^{k+1} + 3(4^{k+1+2}) + 5 \equiv 6 + 4 \cdot 3 \pmod{9} \equiv 0 \pmod{9}.$$

Aleshores $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ és divisible per 9 per a tot enter no negatiu.

Siga $M = \{x^2 + 4xy + y^2, \text{ tal que } x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Demostreu que el nombre 2022 pertany a M i que 11 no pertany a M .
Crux Mathematicorum M417.

Solució:

Vegem que $2022 \in M$, per demostrar-ho vegem que l'equació $x^2 + 4xy + y^2 = 2022$ té solució en els nombres enters.

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2022 = 0.$$

$$x = \frac{-4y \pm \sqrt{16y^2 - 4(y^2 - 2022)}}{2}. \text{ Simplificant.}$$

$$x = -2y \pm \sqrt{3y^2 + 2022}, \text{ tal que, } 3y^2 + 2022 = q^2, q \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Una solució particular és } \begin{cases} q = 45 \\ y = 1 \\ x = 43 \end{cases}$$

Per tant, $2022 \in M$.

Vegem que $11 \notin M$.

$$\text{Considerem l'equació } x^2 + 4xy + y^2 = 11 \quad (1)$$

La primera part de la igualtat ha de ser de ser un nombre imparell.

Si x, y són parell, $x^2 + 4xy + y^2$ és parell.

Si x, y són imparells, $x^2 + 4xy + y^2$ és parell.

Aleshores x, y són de distinta paritat.

Suposem que x és imparell i que y és parell (si x és parell i y imparell es raonaria anàlogament).

$$x = 2n + 1, y = 2m.$$

Substituint en l'equació (1):

$$(2n+1)^2 + 4(2n+1)2m + (2m)^2 = 11.$$

$$4n^2 + 4m^2 + 16mn + 4n + 8m = 10. \text{ Simplificant l'equació:}$$

$$2(n^2 + m^2 + 8mn + 2n + 4m) = 5.$$

La primera part de la igualtat es un nombre parell i la segona imparell. La qual cosa és absurda.

Per tant l'equació $x^2 + 4xy + y^2 = 11$ no té solució en els enters.

Per tant, $11 \notin M$.

Ricard és un estudiant pobre i amb molta gana i un matemàtic astut.
Fa notar que en la residència, 5 sopars costen el mateix que 7 dinars. Després de saltar-se gairebé tots els sopars d'una setmana constata que 5 dinars i un sopar costen 48€ en total.

Quan costen 16 sopars.

Crux Mathematicorum M420.

Solució:

Siga S el preu d'un sopar.

Siga L el preu d'un dinar.

$$5S = 7L \quad (1)$$

$$S + 5L = 48 \quad (2)$$

$$5S - 7L = 0 \quad (3)$$

Sumant les expressions (2) (3):

$$6S - 2L = 48 \quad (4)$$

Multiplicant l'expressió (4) per $\frac{5}{2}$:

$$15S - 5L = 120 \quad (5)$$

Sumant les expressions (2) (5)

$$16S = 168 .$$

Per tant 16 sopars costen 168€.

Siga $[x]$ part entera de x . Resoleu l'equació:

$$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 4.$$

Crux Mathematicorum M421.

Solució:

$$x \neq 0.$$

Suposem que $x < 0$.

$$\frac{1}{x} < 0, \frac{3}{x} < 0. \text{ Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] < 0, \left[\frac{3}{x}\right] < 0.$$

$$\text{Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] < 0.$$

Per tant, $x < 0$ no és solució de l'equació.

Suposem que $x \geq 3$.

$$0 < \frac{1}{x} < 1, 0 < \frac{3}{x} \leq 1. \text{ Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] = 0, \left[\frac{3}{x}\right] \leq 1.$$

$$\text{Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] \leq 1.$$

Per tant, $x \geq 3$ no és solució de l'equació.

Suposem $1 < x < 3$.

$$0 < \frac{1}{x} < 1, 0 < \frac{3}{x} < 3. \text{ Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] = 0, \left[\frac{3}{x}\right] < 3.$$

$$\text{Aleshores, } \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] < 3.$$

Per tant, $1 < x < 3$ no és solució de l'equació.

Suposem $0 < x \leq 1$.

$$\frac{1}{x} \geq 1, \frac{3}{x} \geq 3.$$

$$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{3}{x}\right] = 4.$$

A fi que l'equació tinga solució $2 > \frac{1}{x} \geq 1$ $4 > \frac{3}{x} \geq 3$.

$$x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Demostreu que $\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Crux Mathematicorum M422.

Solució:

Ho demostrarem per inducció completa.

Demostrem la propietat per a $n = 1$.

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}.$$

Suposem certa la propietat per a $n = r$.

$$\sum_{k=1}^r \frac{k(k+1)}{2} = \frac{r(r+1)(r+2)}{6}.$$

Demostrem la propietat para $n = r + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r+1} \frac{k(k+1)}{2} &= \sum_{k=1}^r \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \text{(aplicant la hipòtesi d'inducció)} \\ &= \frac{r(r+1)(r+2)}{6} + \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{6}(r+3) = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}. \end{aligned}$$

La diferència entre les xifres de les desenes i les unitats d'un quadrat perfecte S és 3.
Determineu tots els residus de la divisió de S per 100.
Crux Mathematicorum M423.

Solució:

S serà de la forma $S = a \cdot 10^2 + (b + 3)10 + b$, on $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 6$.

El residu de dividir S entre 10 és $(b + 3)10 + b$.

Les possibles unitats d'un quadrat perfecte són 0, 1, 4, 5, 6, 9

$$S = q^2$$

Com $0 \leq b \leq 6$, las possibles unitats es redueixen a 0, 1, 4, 5, 6.

Suposem que $b = 0$.

Aleshores $q = c \cdot 10 + 0$. Per tant, $S = q^2 = c \cdot 10^2$, en aquest cas las desenes de S no són 3. Per tant no és solució.

Suposem que $b = 1$.

$$S = a \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1$$

Aleshores, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1$ o bé, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 9$, $d \geq 0$, $0 \leq c \leq 9$.

$$\text{Si } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1$$

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + 2d \cdot 10^2 + 2c \cdot 10 + 1.$$

Aleshores $2c \equiv 4 \pmod{10}$. Aleshores, $c = 2, 7$.

$$\text{Anàlogament, } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 9, \quad c = 2, 7.$$

Suposem que $b = 4$.

$$S = a \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$$

Aleshores, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 2$ o bé, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 8$, $d \geq 0$, $0 \leq c \leq 9$.

$$\text{Si } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 2$$

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + (2d + c^2) \cdot 10^2 + 4c \cdot 10 + 4.$$

Aleshores $2c \equiv 7 \pmod{10}$. Aquesta equació no té solució.

$$\text{Si } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 8$$

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + (2d + c^2 + 1) \cdot 10^2 + (6c + 6) \cdot 10 + 4.$$

Aleshores $6c + 6 \equiv 7 \pmod{10}$. Aquesta equació no té solució.

Suposem que $b = 5$.

$$S = a \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$$

Aleshores, $q = c \cdot 10 + 5$ $0 \leq c \leq 9$.

$$q^2 = (c^2 + c) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5.$$

Aleshores $2 \equiv 8 \pmod{10}$. Aquesta equació no té solució.

Suposem que $b = 6$.

$$S = a \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6$$

Aleshores, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 4$ o bé, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 6$, $d \geq 0$, $0 \leq c \leq 9$.

Si $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 4$.

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + (8d + c^2 + 1) \cdot 10^2 + (8c + 1) \cdot 10 + 6.$$

Aleshores $8c + 1 \equiv 9 \pmod{10}$. Aleshores, $c = 1, 6$.

Si $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 6$. Aleshores, $c = 3, 8$.

Per tant els residus de dividir S entre 100 són:
41, 96.

Nota: els valors de q són:

$$q = d \cdot 10^2 + 21$$

$$q = d \cdot 10^2 + 71$$

$$q = d \cdot 10^2 + 29$$

$$q = d \cdot 10^2 + 79$$

$$q = d \cdot 10^2 + 14$$

$$q = d \cdot 10^2 + 64$$

$$q = d \cdot 10^2 + 36$$

$$q = d \cdot 10^2 + 86$$

En la figura els segments $\overline{AB}$, $\overline{CDE}$, $\overline{FGH}$ són paral·lels. A més a més, els segments $\overline{ACF}$, $\overline{BDG}$ són perpendiculars a $\overline{AB}$.

Si les àrees dels rectangles $ABDC$, $CDGF$ i dels triangle BDE són x , y , z , respectivament. Determineu l'àrea del trapezi $DEHG$. En funció de x , y , z .
Crux Mathematicorum M424.

Solució:

Siga S_1 l'àrea del triangle DEG i S_2 l'àrea del triangle GHE .

Dos rectangles (triangles) que tenen la mateixa base les altures són proporcionals a les àrees.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les bases són proporcionals a les àrees

Els rectangles $ABCD$, $CDGF$ tenen la mateixa base $\overline{AB}$, per tant:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DG}}.$$

Els triangles rectangles BDE , DGE , tenen la mateixa altura. Per tant:

$$\frac{S_1}{z} = \frac{\overline{DG}}{\overline{BD}} = \frac{y}{x}. \text{ Aleshores:}$$

$$S_1 = \frac{yz}{x} \quad (1)$$

Els triangles BDE , AGH són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{DG}}. \text{ Aleshores:}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{HE}} = \frac{x}{y}.$$

Los triangles BGE , GHE , tenen la mateixa altura. Per tant:

$$\frac{S_1 + z}{S_2} = \frac{\overline{BE}}{\overline{HE}} = \frac{x}{y}.$$

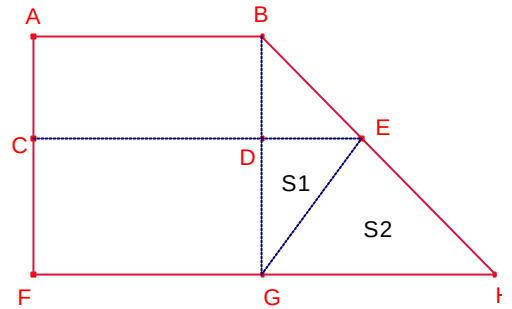
$$S_2 = \frac{y}{x}(S_1 + z) \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$S_2 = \frac{y}{x} \left(\frac{yz}{x} + z \right) \quad (3)$$

Calculem l'àrea del trapezi $DEHG$:

$$S_{\text{DEHG}} = S_1 + S_2 = \frac{yz}{x} + \frac{y}{x} \left(\frac{yz}{x} + z \right) = \frac{yz}{x^2} (2x + y).$$



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siga I l' incentre del triangle.

La bisectriu interior de l'angle C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D .

La recta que passa per D i és perpendicular a $\overline{BI}$ talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E .

La recta que passa per D i és paral·lela a $\overline{BI}$ talla el costat $\overline{AC}$ en el punt F .

Demostreu que els punts E, I, F estan alineats.

Crux Mathematicorum M425.

Solució:

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\overline{AD} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{BD} = \frac{ac}{a+b}.$$

El triangle $\triangle DEB$ és isòsceles, $\overline{BD} = \overline{BE}$.

Siga P la projecció del punt E sobre el catet $\overline{AB}$.

$$\overline{PE} = \overline{BE} \cdot \sin B = \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bc}{a+b}.$$

Aleshores, $\overline{PE} = \overline{AD}$. $\angle DEP = \angle FDA = \frac{B}{2}$.

Per tant, els triangles $\triangle DPE$, $\triangle FAD$ són iguals.

Aleshores, $\overline{DF} = \overline{DE}$, per tant, el triangle $\triangle ADE$ és rectangle i isòsceles.

$$\overline{BP} = \overline{BE} \cdot \cos B = \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{a+b}.$$

$$\overline{AF} = \overline{DP} = \overline{AB} - (\overline{AD} + \overline{BP}) = c - \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{c^2}{a+b} \right) = \frac{ac - c^2}{a+b}.$$

$$\overline{CF} = \overline{AC} - \overline{Af} = b - \frac{ac - c^2}{a+b} = \frac{a^2 + ab - ac}{a+b}.$$

$$\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = a - \frac{ac}{a+b} = \frac{a^2 + ab - ac}{a+b}.$$

Aleshores, $\overline{CF} = \overline{CE}$, per tant el triangle $\triangle CFE$ és isòsceles.

Siga M el punt mig del segment $\overline{FE}$.

La recta CD passa pel punt M .

La recta CM és perpendicular al segment $\overline{FE}$.

La recta DM és perpendicular al segment $\overline{FE}$.

Vegem que el punt M és l' incentre del triangle $\triangle ABC$.

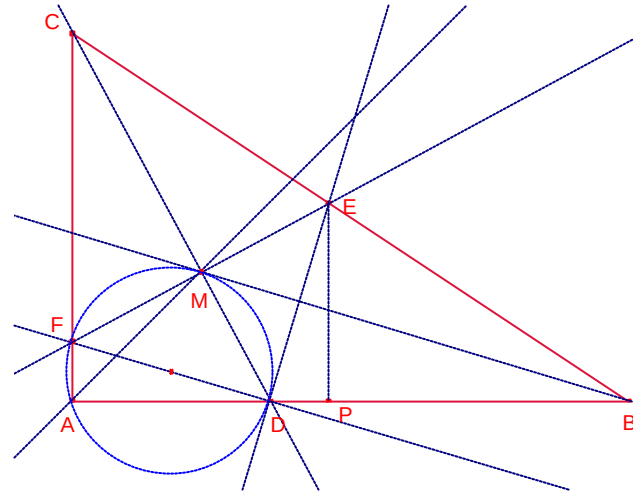
Notem que $\angle FMD = 90^\circ$, aleshores el quadrilàter $ADMF$ està inscrit en una circumferència.

Els angles $\angle MAF = \angle MDF = 45^\circ$.

Aleshores, M pertany a la bisectriu de l'angle A .

Per tant $M = I$.

Per tant, els punts E, F, I estan alineats.



Determineu el nombre d'enters positius més menuts o iguals a 10000000 que siguen divisibles per els enters 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Crux Mathematicorum M426.

Solució:

El menor múltiple comú de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 és:

$$\text{mcm}(2,3,4,5,6,7,8,9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520 .$$

Els múltiples enters positius de 2520 són:

$$2520n, \text{ on } n \geq 1.$$

$$2520n \leq 10000000, \text{ } n \geq 1.$$

$$\text{Aleshores, } 1 \leq n \leq 396 .$$

Per tant hi ha 396 nombres enters positius divisibles a la vegada per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i menors de 10000000.

Sobre un semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ es dibuixa un triangle equilàter $\triangle ABC$.
Determineu l'àrea de la regió compresa a l'interior del triangle i exterior al semicercle
Crux Mathematicorum M427

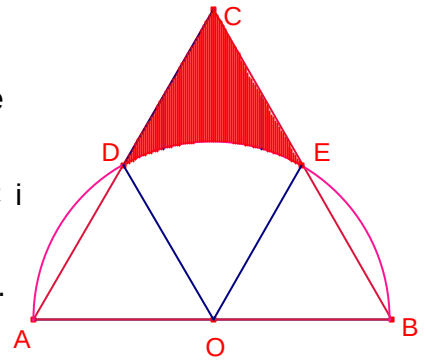
Solució:

Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$, centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

Siguen D, E els punts d'intersecció del triangle equilàter $\triangle ABC$ i l'arc.

Notem que els triangles $\triangle DEC$, $\triangle DEO$ són equilàters de costat r.

L'àrea de l'interior del triangle $\triangle ABC$ exterior al semicercle es igual al doble de l'àrea del triangle equilàter de costat r menys la sisena part del cercle de radi r.



$$S = 2 \left(\frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right) - \frac{1}{6} \pi \cdot r^2 = \left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} \right) r^2.$$

Determineu tots els enters x pels quals $(4-x)^{4-x} + (3-x)^{3-x} + 20 = 4^x + 3^x$

Crux Mathematicorum M428.

Solució:

Si $x = 0$ no és solució de l'equació $(4-x)^{4-x} + (3-x)^{3-x} + 20 = 4^x + 3^x$ ja que:

$$(4-0)^{4-0} + (3-0)^{3-0} + 20 \neq 4^0 + 3^0, \quad 63 \neq 2.$$

Siga $x \in \mathbb{Z}$, $x > 0$.

$$4^x + 3^x \in \mathbb{N}.$$

Si $x > 3$, $(3-x)^{3-x} < 1$, $(4-x)^{4-x} \leq 1$, $3^x + 4^x \geq 337$

$(4-x)^{4-x} + (3-x)^{3-x} + 20 \leq 22$. En aquest cas l'equació no té solució.

$$\text{Si } x = 1, \quad (4-1)^{4-1} + (3-1)^{3-1} + 20 \neq 4^1 + 3^1.$$

$$\text{Si } x = 2, \quad (4-2)^{4-2} + (3-2)^{3-2} + 20 = 4^2 + 3^2.$$

$$\text{Si } x = 3, \quad (4-3)^{4-3} + (3-3)^{3-3} + 20 \neq 4^3 + 3^3.$$

Siga $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$

$$4^x + 3^x < 2$$

$$(3-x)^{3-x} > 1, \quad (4-x)^{4-x} > 1.$$

$(4-x)^{4-x} + (3-x)^{3-x} + 20 > 22$. En aquest cas l'equació no té solució.

Determineu totes les ternes (a,b,c) d'enters positius tals que $a^{(b^c)} = (a^b)^c$.

Crux Mathematicorum M429.

Solució:

$$a^{(b^c)} = (a^b)^c.$$

$$a^{(b^c)} = a^{bc}, \quad a \geq 1.$$

Si $a = 1$, $1^{(b^c)} = 1^{bc}$, $\forall b, c \in \mathbb{N}$.

Aleshores una solució és $(a,b,c) = (1, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Igualant els exponents:

$$b^c = bc, \quad b^c \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Aleshores } c = b^{c-1}.$$

Suposem $c = 1$, aleshores $b^0 = 1$, $\forall b \in \mathbb{N}$.

Aleshores una solució és $(a,b,c) = (\alpha, \beta, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Suposem $c > 1$, aleshores c divideix a b , i b divideix a c . Per tant $b = c$.

$$b^b = bb = b^2.$$

$$b = c = 2.$$

Aleshores una solució és $(a,b,c) = (\alpha, 2, 2)$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Determineu el valor $d > 0$ tal que l'àrea del quadrilàter de vèrtexs $A(0,2)$, $B(4,6)$, $C(7,5)$, $D(d,0)$ és 24.

Crux Mathematicorum M432.

Solució

Siga M la projecció de B sobre l'eix d'abscisses.

Siga N la projecció de C sobre l'eix d'abscisses.

Suposem que $0 \leq d \leq 7$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual l'àrea dels trapezis AOMB i BMNC menys l'àrea

dels triangles $\triangle OAD$ i $\triangle CDN$.

$$S_{AOMB} = \frac{6+2}{2} \cdot 4 = 16.$$

$$S_{BMNC} = \frac{6+5}{2} \cdot 3 = \frac{33}{2}.$$

$$S_{OAD} = \frac{2d}{2} = d.$$

$$S_{CDN} = \frac{5(7-d)}{2}.$$

Per hipòtesi $S_{ABCD} = 24$.

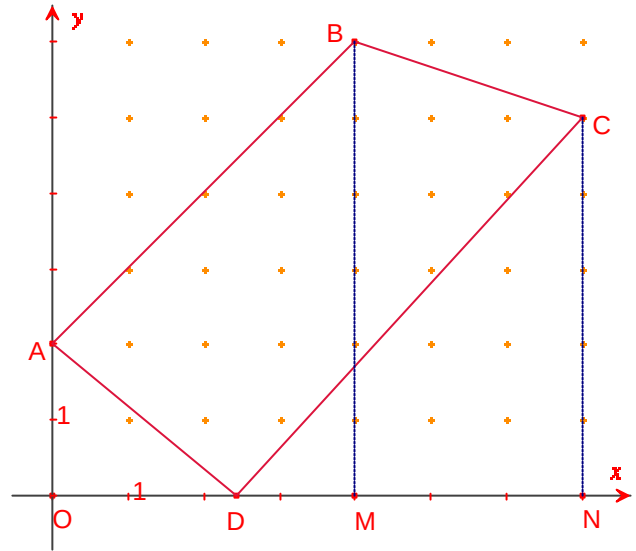
$$S_{ABCD} = S_{AOMB} + S_{BMNC} - S_{OAD} - S_{CDN}.$$

$$16 + \frac{33}{2} - d - \frac{5(7-d)}{2} = 24.$$

Simplificant:

$$3d = 18.$$

Aleshores, $d = 6$.



Suposem que $d > 7$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a l'àrea dels trapezis AOMB i BMNC més l'àrea

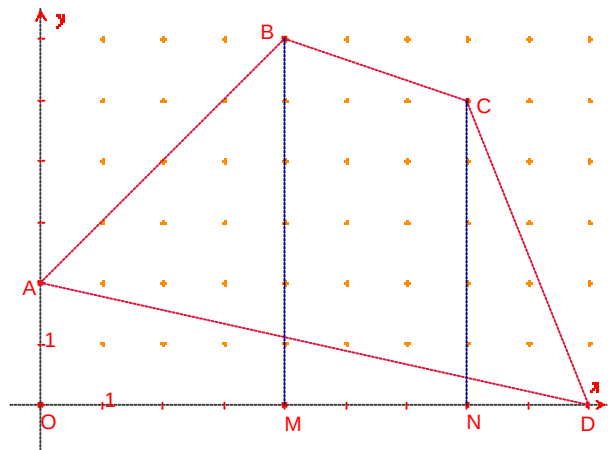
del triangle $\triangle CDN$ menys l'àrea del triangle $\triangle OAD$.

$$\text{En aquest cas } S_{OAD} = \frac{2d}{2} = d. \quad S_{CDN} = \frac{5(d-7)}{2}.$$

$$S_{ABCD} = S_{AOMB} + S_{BMNC} + S_{CDN} - S_{OAD}.$$

$$16 + \frac{33}{2} + \frac{5(d-7)}{2} - d = 24.$$

Aleshores $d = -2$ que és absurda ja que $d > 7$.



En un triangle $\triangle ABC$ $\overline{AB} < \overline{BC}$, L és el punt mig del costat $\overline{AC}$ i M és el punt mig del costat $\overline{AB}$. Si P es un punt del segment $\overline{LM}$ tal que $\overline{MP} = \overline{MA}$. Proveu que $\angle PBA = \angle PBC$.

Crux Mathematicorum M433

Solució:

El segment $\overline{ML}$ és paral·lela mitjana del triangle $\triangle ABC$.
Aleshores $\angle AML = B$.

El triangle $\triangle AMP$ és isòsceles, $\overline{MP} = \overline{MA}$. Aleshores, $\angle PAM = 90^\circ - \frac{B}{2}$.

$\overline{PM}$ és mitjana del triangle $\triangle APM$. $\overline{MP} = \overline{MA} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

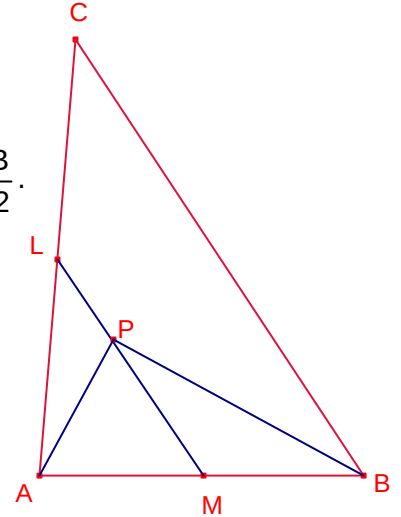
Aleshores el triangle $\triangle APM$ és rectangle, $\angle APB = 90^\circ$.

Per tant, $\angle PBA = 90^\circ - \angle PAB = \frac{B}{2}$.

$\angle PBC = B - \angle PBA = \frac{B}{2}$.

Aleshores, $\angle PBA = \angle PBC$.

Si eliminem la condició $\overline{AB} < \overline{BC}$ i considerem el punt P sobre la recta LM la propietat s'acompleix anàlogament.



Determineu tots els 8 dígit positius del nombre abcdefgh que satisfan les relacions

$$a^3 - b^2 = 2, \quad c^3 - d^2 = 4, \quad 2^e - f^2 = 7, \quad g^3 - h^2 = -1.$$

Crux Mathematicorum M434.

Solució:

$$a^3 - b^2 = 2.$$

$$b = +\sqrt{a^3 - 2}, \quad 0 \leq b \leq 9.$$

$$2 \leq a^3 \leq 83.$$

$$2 \leq a \leq 4.$$

Si $a = 2$, aleshores $b = \sqrt{6} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

Si $a = 3$, aleshores $b = 5$.

Si $a = 4$, aleshores $b = \sqrt{62} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

$$c^3 - d^2 = 4.$$

$$d = +\sqrt{c^3 - 4}, \quad 0 \leq d \leq 9.$$

$$4 \leq c^3 \leq 85.$$

$$2 \leq c \leq 4.$$

Si $c = 2$, aleshores $d = 2$.

Si $c = 3$, aleshores $d = \sqrt{23} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

Si $c = 4$, aleshores $d = \sqrt{60} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

$$2^e - f^2 = 7.$$

$$f = +\sqrt{2^e - 7}, \quad 0 \leq f \leq 9.$$

$$7 \leq 2^e \leq 107.$$

$$3 \leq e \leq 6.$$

Si $e = 3$, aleshores $f = 1$.

Si $e = 4$, aleshores $f = 3$.

Si $e = 5$, aleshores $f = 4$.

Si $e = 6$, aleshores $f = \sqrt{57} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

$$g^3 - h^2 = -1.$$

$$h = +\sqrt{g^3 + 1}, \quad 0 \leq h \leq 9.$$

$$0 \leq g^3 \leq 80.$$

$$0 \leq g \leq 4.$$

Si $g = 0$, aleshores $h = 1$.

Si $g = 1$, aleshores $h = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

Si $g = 2$, aleshores $h = 3$.

Si $g = 3$, aleshores $h = \sqrt{28} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

Si $g = 4$, aleshores $h = \sqrt{65} \notin \mathbb{N}$. No és solució.

Les solucions del problema són les sis següents:

35223101, 35223123, 35224301, 35224323, 35225501, 35225523.

Demostreu que $\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{n(n+2)}{n+1}$.

Crux Mathematicorum M435.

Solució:

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \left(\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} \right)^2.$$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)}.$$

$$\frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1} \right) = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$